6.2.5. Інтегрування виразів, що містять тригонометричні функції

1. Інтеграли вигляду:

$$\int \sin(kx)\cos(lx)dx; \int \cos(kx)\cos(lx)dx; \int \sin(kx)\sin(lx)dx.$$

Із тригонометрії відомо, що добуток тригонометричних функцій перетворюється в суму за формулами:

$$\sin kx \cos lx = \frac{1}{2}\left[\sin(k-l)x + \sin(k+l)x\right];$$

$$\cos kx \cos lx = \frac{1}{2}\left[\cos(k-l)x + \cos(k+l)x\right];$$

$$\sin kx \sin lx = \frac{1}{2}\left[\cos(k-l)x - \cos(k+l)x\right].$$

Приклади

1. $\int \sin 6x \cos 7x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 13x - \sin x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 13x dx - \frac{1}{2}\int \sin x dx =$

$= -\frac{1}{26}\cos 13x + \frac{1}{2}\cos x + C.$

2. $\int \cos 5x \cos 9x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 14x + \cos 4x)dx = \frac{1}{2}\frac{1}{14}\sin 14x + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\sin 4x + C =$

$= \frac{1}{28}\sin 14x + \frac{1}{8}\sin 4x + C.$

3. $\int \sin 12x \sin 4x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 8x - \cos 16x)dx = \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{32}\sin 16x + C.$

4. $\int \sin 2x \cos 5x \sin 9x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \left[\sin 4x + \sin 14x\right] dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \sin 4x dx +$

$+ \frac{1}{2}\int \sin 2x \sin 14x dx = \frac{1}{4}\int (\cos 2x - \cos 6x)dx + \frac{1}{4}\int (\cos 12x - \cos 16x)dx =$

$= \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 6x + \frac{1}{48}\sin 12x - \frac{1}{64}\sin 16x + C.$

2. Інтеграли вигляду:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \quad m, n > 0.$$

а) Розглянемо випадок, коли показник степеня синуса є непарне число $m=2k+1$.

$\sin^m x\,\cos^n x dx = \sin^{2k+1} x\,\cos^n x dx = \sin^{2k} x\,\cos^n x\,\sin x dx = -(\sin^2 x)^k \cos^n x\, d(\cos x) =$
$= -(1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x) = \left|\cos x = z\right| = -(1-z^2)^k z^n dz.$

$$\int \sin^{2k+1} x \cos^n x dx = -\int (1-z^2)^k z^n dz\,.$$

б) Другий випадок. Показник степеня косинуса є непарне число

$$n=2k+1.$$

$\sin^m x\,\cos^n x dx = \sin^m x\,\cos^{2k+1} x dx = \sin^m x\,\cos^{2k} x\,\cos x\, dx = \sin^m x(1-\sin^2 x)^k d(\sin x) =$

$\left|\sin x = z\right| = z^m (1-z^2)^k dz\,.$

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx = \int z^m \left(1-z^2\right)^k dz\,.$$

При обчисленні інтегралів такого вигляду задача зводиться до інтегрування степеневих функцій.

Приклади

1. $\int \sin^5 x \cos^2 x dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x dx = -\int \sin^4 x \cos^2 x d(\cos x) =$

$= -\int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x d(\cos x) = \left|\cos x = z\right| = -\int (1-z^2)^2 z^2 dz =$

$= -\int (1-2z^2+z^4) z^2 dz = -\int (z^2-2z^4+z^6) dz = -\left(\frac{z^3}{3} - 2\frac{z^5}{5} + \frac{z^7}{7}\right) + C =$

$= -\left(\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{2}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x\right) + C.$

2. $\int \sin^4 x \cos^7 x dx = \int \sin^4 x \cos^6 x \cos x dx = \int \sin^4 x (\cos^2 x)^3 d(\sin x) =$

$= \int \sin^4 x (1-\sin^2 x)^3 d(\sin x) = \left|\sin x = z\right| = \int z^4 (1-z^2)^3 dz =$

$= \int z^4 (1-3z^2+3z^4-z^6) dz = \int (z^4-3z^6+3z^8-z^{10}) dz =$

$= \frac{z^5}{5} - 3\frac{z^7}{7} + 3\frac{z^9}{9} - \frac{z^{11}}{11} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{3}{7}\sin^7 x + \frac{1}{3}\sin^9 x - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$

3. Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

1. За допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad dx=\frac{2dt}{1+t^2},$$

інтеграл перетворюється в інтеграл від раціональної функції.

Зазначимо ще три випадки, в яких застосовуються більш прості підстановки, ніж універсальна тригонометрична.

2. Якщо $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, тобто функція непарна відносно $\sin x$, то за нову змінну приймають $t=\cos x$.

3. Якщо $R(\sin x,-\cos x)=-\ R(\sin x,\cos x)$, то $t=\sin x$.

4. Якщо $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, тобто функція парна відносно $\sin x$ і $\cos x$ водночас, то $t=\operatorname{tg} x$ або $t=\operatorname{ctg} x$.

Приклади

1. $$\int\frac{dx}{\sin^5 x}=\left\|\begin{array}{c}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}\end{array}\right\|=\int\frac{2(1+t^2)^5dt}{(1+t^2)(2t)^5}=\frac{1}{16}\int\frac{(1+t^2)^4dt}{t^5}=$$

$$=\frac{1}{16}\int\frac{(1+4t^2+6t^4+4t^6+t^8)dt}{t^5}=\frac{1}{16}\int\left(\frac{1}{t^5}+4\frac{1}{t^3}+\frac{6}{t}+4t+t^3\right)dt=$$

$$=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\frac{1}{t^4}-2\frac{1}{t^2}+6\ln|t|+\frac{t^4}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4\frac{x}{2}-2\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}+6\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4\frac{x}{2}\right)+\ C.$$

2. $$\int\frac{dx}{8+7\cos x+\sin x}=\left\|\begin{array}{c}t=tg\frac{x}{2};\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\\ dt=\frac{2dt}{1+t^2};\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right\|=$$

$$=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left[8+\frac{7(1-t^2)}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}\right]}=$$

$$=2\int\frac{dt}{8+8t^2+7-7t^2+2t}=2\int\frac{dt}{15+t^2+2t}=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+14}=$$

$$=2\int\frac{d(t+1)}{(t+1)^2+14}=2\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{t+1}{\sqrt{14}}+C=\frac{2}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)}{\sqrt{14}}+C.$$

3. $\int \frac{\cos^3 xdx}{2+\sin x} = \left\| \frac{(-\cos x)^3}{2+\sin x} = -\frac{\cos^3 x}{2+\sin x} \right\| =$

$\|$ оскільки функція непарна відносно cos *x*, то за нову змінну приймаємо $t=\sin x$ $\|$

$$= \int \frac{\cos^2 x \cos xdx}{2+\sin x} = \int \frac{1-\sin^2 x \; d(\sin x)}{2+\sin x} = \left\| \begin{matrix} t=\sin x \\ dt = d(\sin x) \end{matrix} \right\| = \int \frac{(1-t^2)dt}{2+t} =$$

$$= \int (-t+2-\frac{3}{2+t})dt = -\frac{t^2}{2} + 2t - 3\int \frac{d(t+2)}{t+2} = -\frac{t^2}{2} + 2t - 3\ln|t+2| + C =$$

$$= -\frac{\sin^2 x}{2} + 2\sin x - 3\ln|\sin x + 2| + C \; .$$

4. $\int \frac{\sin x \cos xdx}{(3+\cos x)^2} = \left\| \frac{(-\sin x)\cos x}{(3+\cos x)^2} = -\frac{\sin x \cos x}{(3+\cos x)^2} \right\| = -\int \frac{\cos xd(\cos x)}{(3+\cos x)^2} =$

$$= -\int \frac{tdt}{(3+t)^2} = -\int \frac{(3+t)-3}{(3+t)^2}dt = -\int \frac{d(t+3)}{3+t} + 3\int \frac{d(t+3)}{(3+t)^2} =$$

$$= -\ln|3+t| - \frac{3}{3+t} + C = C - \ln|3+\cos x| - \frac{3}{3+\cos x}.$$

5. $\int \mathrm{tg}^5 xdx$.

Перший спосіб

$$\int \mathrm{tg}^5 xdx = \left\| \begin{matrix} \mathrm{tg}\, x = t \\ x = \mathrm{arctg}\, t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right\| = \int \frac{t^5}{1+t^2}dt = \left\| tdt = \frac{1}{2}d\;\; t^2 \right\| = \frac{1}{2}\int \frac{t^4 d\;\; t^2}{1+t^2} = \left\| t^2 = u \right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{u^2 du}{1+u} = \frac{1}{2}\int \frac{u^2-1+1}{1+u}du = \frac{1}{2}\left[\int \frac{u^2-1}{1+u}du + \int \frac{du}{1+u} \right] = \frac{1}{2}\int \left(u-1\right)du +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln|1+u| = \frac{1}{2}\frac{u-1\;^{2}}{2} + \frac{1}{2}\ln|u+1| + C = \left\| u = t^2, \;\; t = \mathrm{tg}\, x, \;\; u = tg^2 x \right\| =$$

$$= \frac{1}{4}\;\mathrm{tg}^2 x - 1\;^{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}^2 x + 1\right| + C = \frac{1}{4}\;\mathrm{tg}^2 x - 1\;^{2} - \frac{1}{2}\ln\;\cos^2 x\; + C.$$

Другий спосіб

$$\int \mathrm{tg}^5 xdx = \int \mathrm{tg}^3 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \mathrm{tg}^3 xd\,\mathrm{tg}\, x - \int \mathrm{tg}^3 xdx =$$

$$=\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}-\int \mathrm{tg}\,x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\frac{\mathrm{tg}^4 x}{4}-\frac{\mathrm{tg}^2 x}{2}-\ln|\cos x|+C.$$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}=$

$$=\left\| \begin{array}{c} \dfrac{1}{(-\sin x)^2-4(-\sin x)(-\cos x)+5(-\cos x)^2}= \\ =\dfrac{1}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x} \end{array} \right\|=$$

для переходу до нової змінної $t=\mathrm{tg}\,x$ поділимо чисельник і знаменник на $\cos^2 x$:

$$=\int \frac{dx/\cos^2 x}{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-4\dfrac{\sin x\cos x}{\cos^2 x}+5\dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x}}=\int \frac{d(\mathrm{tg}\,x)}{\mathrm{tg}^2 x-4\,\mathrm{tg}\,x+5}=$$

$$=\int \frac{dt}{t^2-4t+5}=\int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2+1}=\mathrm{arctg}(t-2)+C=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x-2)+C\ .$$

4. Інтегрування парних степенів синуса і косинуса.

$$\int \sin^{2n} x dx,\ \int \cos^{2n} x dx,\ n - \text{ціле, } n>0.$$

Застосуємо такі формули тригонометрії:

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x);\quad \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Застосування цих формул дозволяє знизити степінь синуса або косинуса і збільшити аргумент.

Приклади

1. $\displaystyle\int \cos^4 x dx=\int (\cos^2 x)^2 dx=\int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2 dx=$

$$=\frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx=$$

‖до останнього інтеграла застосовуємо прийом пониження степеня: ‖

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

2. $\int \sin^6 x dx = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)^3 dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x +$$

$$+\frac{3}{8}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{16}\int (1-\sin^2 2x)d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{5}{16}x - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} + C \ .$$

3. $\int \sin^5 x dx = \int \sin^4 x \sin x dx = -\int (1-\cos^2 x)^2 d(\cos x) =$

$$= -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)d(\cos x) = -(\cos x - 2\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}) + C \, .$$

4. $\int \cos^4 x \sin^2 x dx = \frac{1}{4}\int \cos^2 x 4\cos^2 x \sin^2 x dx = \frac{1}{4}\int \cos^2 x \sin^2 2x dx =$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 2x}{2}\sin^2 2x dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2}dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\frac{\sin^3 2x}{3} + C \ .$$

5. Інтеграли вигляду $\int \mathrm{tg}^n x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n x dx$.

До інтегралу $\int \mathrm{tg}^n x dx$ варто застосувати підстановку tg$x$ = z, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$

.

$\int tg^n x dx = \int \frac{z^n dz}{1+z^2}$. Виконуючи ділення z^n на (z^2+1), дійдемо до табличних інтегралів.

До інтеграла $\int \mathrm{ctg}^n x dx$ застосуємо підстановку $\mathrm{ctg}\, x = z, dx = -\frac{dz}{1+z^2}$.

$\int \mathrm{ctg}^n x dx = -\int \frac{z^n dz}{z^2+1}$, далі потрібно виконати ділення і знайти інтеграли.

Приклади

1. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx = \left\| \begin{matrix} \operatorname{ctg} x = z \\ dx = -\dfrac{dz}{1+z^2} \end{matrix} \right\| = -\int \dfrac{z^5 dz}{z^2+1} = \left\| \dfrac{z^5}{z^2+1} = z^3 - z + \dfrac{z}{z^2+1} \right\| =$

$= -\int (z^3 - z + \dfrac{z}{z^2+1}) dz = -(\dfrac{z^4}{4} - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{1}{2}\ln\left|z^2+1\right|) + C =$

$= -(\dfrac{\operatorname{ctg}^4 x}{4} - \dfrac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} + \dfrac{1}{2}\ln\left|z^2+1\right|) + C.$

2. $\int \operatorname{tg}^4 x dx = \left\| \begin{matrix} \operatorname{tg} x = z \\ dx = \dfrac{dz}{1+z^2} \end{matrix} \right\| = \int \dfrac{z^4}{z^2+1} dz = \int (z^2 - 1 + \dfrac{1}{z^2+1}) dz = \dfrac{z^3}{3} - z +$

$+ \operatorname{arctg} z + C = \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \dfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C$.

6. Інтеграл вигляду $\int \dfrac{1}{\sin^n x \cos^m x}$, де $n>0$, $m>0$.

Чисельник можна замінити тригонометричною одиницею в другому степені:

$$1^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2.$$

$$\int \frac{1}{\sin^n x \cos^m x} dx = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^n x \cos^m x} dx = \int \frac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^n x \cos^m x} dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sin^{n-4} x \cos^m x} dx + 2\int \frac{1}{\sin^{n-2} x \cos^{n-2} x} dx + \int \frac{1}{\sin^n x \cos^{m-4} x} dx$$

і знову повторити той же прийом, зводячи інтеграли до табличних.

Приклади

1. $\int \dfrac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} dx = \int \dfrac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\cos^4 x \sin^2 x} dx = \int \dfrac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\cos^4 x \sin^2 x} dx =$

$= \int \dfrac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx + 2\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} + \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x -$

$- \operatorname{ctg} x + C.$

2. $\int \dfrac{1}{\sin^3 x \cos^3 x} dx = \int \dfrac{\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x}{\sin^3 x \cos^3 x} dx = \int \dfrac{\sin x dx}{\cos^3 x} +$

$+ 2\int \dfrac{1}{\sin x \cos x} dx + \int \dfrac{\cos x dx}{\sin^3 x} = -\int \dfrac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + 4\int \dfrac{dx}{\sin 2x} + \int \dfrac{d(\sin x)}{\sin^3 x} =$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2 x}+2\ln|tgx|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C.$$

7. Інтеграли вигляду $\int\frac{\sin^{2n}x}{\cos^{2m}x}dx\ (m\geq n)$, $\int\frac{\cos^{2m}x}{\sin^{2n}x}dx\ \ (n\geq m)$ обчислюються за допомогою підстановок $z=\mathrm{tg}\,x$ або $z=\mathrm{ctg}\,x$.

Якщо степінь чисельника більше степеня знаменника $n>m$, то

$$\int\frac{\sin^{2n}x}{\cos^{2m}x}dx=\int\frac{(\sin^2 x)^n}{\cos^{2m}x}dx=\int\frac{(1-\cos^2 x)^n}{\cos^{2m}x}dx.$$

Приклад. $\int\frac{\sin^2 xdx}{\cos^6 x}=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\left\|\begin{array}{c}\frac{dx}{\cos^2 x}=d(\mathrm{tg}\,x),\ \mathrm{tg}\,x=z\\ \frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x\end{array}\right\|=$

$$=\int z^2(1+z^2)dz=\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+C=\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3}+\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5 x+C.$$

8. Інтеграли вигляду: $\int\frac{dx}{\sin^{2n}x}$ і $\int\frac{dx}{\cos^{2n}x}$.

а) $\int\frac{dx}{\sin^{2n}x}=\int\frac{1}{\sin^{2n-2}x}\frac{dx}{\sin^2 x}=\left\|\begin{array}{c}\mathrm{ctg}\,x=z\\ \frac{1}{\sin^2 x}=1+\mathrm{ctg}^2 x=1+z^2\end{array}\right\|=$

$$=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^{n-1}\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int\ 1+\mathrm{ctg}^2 x\ ^{n-1}d(\mathrm{ctg}\,x)=-\int(1+z^2)^{n-1}dz\ .$$

Приклад. $\int\frac{dx}{\sin^8 x}=\int\frac{1}{\sin^6 x}\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)^3\frac{dx}{\sin^2 x}=$

$$-\int(1+\mathrm{ctg}^2 x)^3 d(\mathrm{ctg}\,x)==-\left(\mathrm{ctg}\,x+\mathrm{ctg}^3 x+\frac{3}{5}\mathrm{ctg}^5 x+\frac{\mathrm{ctg}^6 x}{6}\right)+C.$$

б) $\int\frac{dx}{\cos^{2m}x}=\int\frac{1}{\cos^{2m-2}x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{m-1}\frac{dx}{\cos^2 x}=$

$$=\left\|\begin{array}{c}\mathrm{tg}\,x=z\\ \frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x=1+z^2\end{array}\right\|=\int\ 1+\mathrm{tg}^2 x\ ^{m-1}d(\mathrm{tg}\,x)=\int(1+z^2)^{m-1}dz\ .$$

Приклади

1. $\int\frac{dx}{cos^6 x}=\int\frac{1}{cos^4 x}\frac{dx}{cos^2 x}=\int\left(\frac{1}{cos^2 x}\right)^2\frac{dx}{cos^2 x}=|tgx=z|=$

$$=\int(1+tg^2x)^2(dtgx)=\int\left(1+z^2\right)^2dz=\int(1+2z^2+z^4)dz=z+\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5+C=$$

$$=tgx+\frac{2}{3}tg^3x+\frac{1}{5}tg^5x+C\ .$$

2. $$\int\frac{\cos^6 x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{(\cos^2 x)^3}{\sin^4 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x^{\;\;3}}{\sin^4 x}dx=\int\frac{1-3\sin^2 x+3\sin^4 x-\sin^6 x}{\sin^4 x}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^4 x}-3\int\frac{dx}{\sin^2 x}+3\int dx-\int\sin^2 xdx=\int\frac{1}{\sin^2 x}\frac{dx}{\sin^2 x}+3\operatorname{ctg}x+3x-$$

$$-\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=-\int(1+\operatorname{ctg}^2 x)d(\operatorname{ctg}x)+3\operatorname{ctg}x+3x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x=$$

$$=-\operatorname{ctg}x-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}+3\operatorname{ctg}x+\frac{5}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C\,.$$