

**Лінійні диференціальні рівняння I порядку. Метод варіації довільної сталої.**

Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо  $y$  і  $y'$  входять до нього лінійно, тобто в першому степені:

$$A(x)y' + B(x)y = C(x).$$

Оскільки  $A(x) \neq 0$ , то рівняння приводиться до вигляду:

$$\boxed{y' + p(x)y = f(x)}, \quad (1)$$

де  $f(x)$  – права частина лінійного диференціального рівняння.

Якщо  $f(x) \equiv 0$ , то рівняння називається *однорідним лінійним* рівнянням.

Якщо  $f(x) \neq 0$ , то маємо *неоднорідне лінійне* рівняння.

Однорідне лінійне рівняння являє собою рівняння з відокремлюваними змінними:

$$y' + p(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx.$$

Після інтегрування одержимо загальний розв'язок однорідного лінійного рівняння:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

Для розв'язання неоднорідного лінійного рівняння застосуємо **метод варіації довільної сталої**: розв'язок шукаємо в тому ж вигляді, що і розв'язок однорідного рівняння, але вважаємо  $C$  невідомою функцією  $x$ , тобто

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx},$$

$$y' = C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx} p(x).$$

Підставимо отримані вирази у рівняння (1):

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - C(x)e^{-\int p(x)dx} p(x) + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x).$$

Після спрощення одержимо  $C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}$ .

Інтегруючи, знаходимо  $C(x)$

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C_1.$$

Загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння має вигляд:

$$y(x) = C_1 e^{-\int p(x)dx} + \left( \int f(x) e^{\int p(x)dx} dx \right) e^{-\int p(x)dx} = y_o(x) + y_H(x),$$

де  $y_o(x)$  – загальний розв'язок однорідного рівняння;  $y_H(x)$  – частинний розв'язок неоднорідного рівняння ( $C_1 = 0$ ).

**Приклад 1.**  $(x^2 + 1)y' + xy = x(x^2 + 1)$ .

**Розв'язання.** Поділимо дане рівняння на  $(x^2 + 1)$ :

$$y' + \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)y = x. \quad (*)$$

1. Розв'язуємо рівняння без правої частини  $y' + \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)y = 0$ .

Відокремлюємо змінні  $\frac{dy}{y} = -\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)dx$  та інтегруємо

$$\ln|y| = -\frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + \ln|C|.$$

Звідки  $y_0 = \frac{C}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

2. Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y = \frac{C(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (**).$$

Знаходимо похідну  $y' = \frac{C'(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{C(x)}{(x^2 + 1)^{3/2}}x$

Підставляємо отримані вирази до рівняння (\*):

$$C'(x)\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - C(x)\frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}} + \frac{x}{(x^2 + 1)}\frac{C(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} = x.$$

Звідки, після спрощення маємо  $C'(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$ .

Інтегруванням знаходимо  $C(x) = \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{3} + C_1$ .

Підставляємо знайдену функцію  $C(x)$  в вираз (\*\*).

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_H = \frac{C_1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x^2 + 1}{3}.$$

**Приклад 2.**  $(x - 2yx - y^2)dy + y^2dx = 0$ .

**Розв'язання.** Це диференціальне рівняння є лінійним, якщо розглядати  $x$  як функцію від  $y$ . Дійсно,

$$y^2 \frac{dx}{dy} + (1 - 2y)x = y^2.$$

Поділимо все рівняння на  $y^2$  ( $y \neq 0$ ):

$$\frac{dx}{dy} + \frac{1 - 2y}{y^2}x = 1. \quad (***)$$

1. Знаходимо розв'язок однорідного рівняння. Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dx}{x} = \frac{2y-1}{y^2} dy.$$

Після інтегрування знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$\ln|x| = \ln y^2 + \frac{1}{y} + \ln|C| \Rightarrow x_i = Cy^2 e^{\frac{1}{y}}.$$

2. Застосовуючи метод варіації довільної сталої, шукаємо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння у вигляді:

$$x_i = C(y)y^2 e^{\frac{1}{y}}, \quad x' = C'(y)y^2 e^{\frac{1}{y}} + C(y) \left( 2ye^{\frac{1}{y}} - e^{\frac{1}{y}} \right).$$

Знайдені  $x$  та  $x'$  підставимо у рівняння (\*\*\*):

$$C'(y)y^2 e^{\frac{1}{y}} + C(y) \left( 2ye^{\frac{1}{y}} - e^{\frac{1}{y}} \right) + \frac{1-2y}{y^2} C(y)y^2 e^{\frac{1}{y}} = 1,$$

Після спрощення:  $C'(y) = \frac{1}{y^2} e^{-\frac{1}{y}} \Rightarrow C(y) = e^{-\frac{1}{y}} + C_1.$

Остаточню 
$$\begin{cases} x_i = \left( e^{-\frac{1}{y}} + C_1 \right) y^2 e^{\frac{1}{y}} = y^2 + C_1 y^2 e^{\frac{1}{y}}, \\ y \equiv 0. \end{cases}$$

## Рівняння Бернуллі

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = f(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, \alpha \neq 1) \quad (2)$$

називається *рівнянням Бернуллі*.

Це рівняння зводиться до лінійного рівняння за допомогою заміни змінної.

Поділимо все рівняння на  $y^\alpha$ :

$$\frac{y'}{y^\alpha} + p(x)\frac{y}{y^\alpha} = f(x) \quad \text{або} \quad y^{-\alpha} y' + p(x)y^{1-\alpha} = f(x)$$

і зробимо заміну змінної  $y^{1-\alpha} = z(x)$ . Тоді  $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha} y'$ .

Підставимо у рівняння (2):

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = f(x).$$

Одержали лінійне неоднорідне рівняння. Для його розв'язання можна скористатися методом варіації довільної сталої.

**Приклад.**  $xy' + y = y^2 \ln x$ .

**Розв'язання.** Поділимо на  $y^2$  ( $y^2 \neq 0$ ):  $xy^{-2}y' + y^{-1} = \ln x$ .

Робимо заміну:  $z(x) = y^{-1}$ ,  $z' = -y^{-2}y'$ .

Рівняння набуває вигляду:  $xz' - z = -\ln x$ . Це лінійне рівняння. Розв'язуємо методом варіації довільної сталої:

1.  $xz' - z = 0$ ,  $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$ ,  $z_0 = Cx$ .

2.  $z_i(x) = C(x)x$ ,  $z'(x) = C'(x)x + C(x)$ ,

$$C'(x)x^2 + xC(x) - C(x)x = -\ln x \Rightarrow C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

$$C(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C_1, \quad z_i = \ln x + 1 + C_1x, \quad y = \frac{1}{z_i} = \frac{1}{C_1x + \ln x + 1}.$$

Рівняння має ще додатковий розв'язок  $y = 0$ .

Лінійні рівняння та рівняння Бернуллі можна розв'язувати ще й іншим методом, який називають **методом Бернуллі**. Пояснимо цей метод на прикладі цього ж рівняння Бернуллі:

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Подамо невідомий розв'язок  $y(x)$  у вигляді добутку двох інших невідомих функцій  $u = u(x)$  та  $v = v(x)$  з яких одна довільна, але не дорівнює нулю, тобто

$$y = u \cdot v, \quad y' = u'v + v'u.$$

Після підстановки  $y$  та  $y'$  у вихідне рівняння воно набуває вигляду

$$x(u'v + v'u) + u \cdot v = u^2v^2 \ln x,$$

або

$$(xu' + u)v + xv'u = u^2v^2 \ln x.$$

Визначимо функцію  $u$  так, щоб коефіцієнт при  $v$  дорівнював нулю:

$$xu' + u = 0 \Rightarrow \frac{du}{u} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow u = \frac{1}{x}.$$

(За функцію  $u$  приймаємо частинний розв'язок рівняння при  $C = 1$ .)

Тоді для визначення  $v$  одержимо рівняння

$$xv'u = u^2v^2 \ln x.$$

Оскільки  $u = \frac{1}{x}$ , то

$$v' = \frac{1}{x^2}v^2 \ln x.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:  $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^2}v^2 \ln x \Rightarrow \frac{dv}{v^2} = \frac{1}{x^2} \ln x dx$ .

Після інтегрування одержимо

$$-\frac{1}{v} = -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} - C \Rightarrow v = \frac{x}{Cx + \ln x + 1}.$$

Отже,  $y = u \cdot v = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}$ ;  $y = 0$ .

### Диференціальні рівняння у повних диференціалах.

Рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (3)$$

називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції  $u(x, y)$ , тобто

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$$

У цьому випадку рівняння можна записати так:

$$du(x, y) = 0,$$

а його загальний інтеграл рівняння буде мати вигляд

$$u(x, y) = \tilde{N},$$

де  $C$  – довільна стала.

Для того щоб рівняння (3) було рівнянням в повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб для функцій  $P(x, y)$  та  $Q(x, y)$  виконувалась умова:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (4)$$

З'ясуємо методику інтегрування рівнянь в повних диференціалах.

Згадаємо, що повний диференціал функції це:

$$du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

Якщо для рівняння (3) умова (4) виконується, то невідома функція  $u(x, y)$  задовольняє рівностям:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \quad (5)$$

Інтегруючи першу рівність з (5) за змінною  $x$ , визначимо функцію  $u(x, y)$  з точністю до довільної диференційованої функції  $\varphi(y)$ :

$$u(x, y) = \int P(x, y)dx = F(x, y) + \varphi(y), \quad (6)$$

де  $F(x, y)$  – первісна функції  $P(x, y)$  за змінною  $x$  ( $y$  при інтегруванні вважаємо сталою).

Диференціюючи рівність (6) за змінною  $y$  і враховуючи другу рівність з (5), маємо рівняння для знаходження функції  $\varphi'(y)$ :

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} + \varphi'(y) = Q(x, y) \Rightarrow \varphi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}.$$

Інтегруємо останню рівність за змінною  $y$ , та знаходимо  $\varphi(y)$ . Підставляємо  $\varphi(y)$  в (6), та записуємо загальний інтеграл рівняння:  $u(x, y) = \tilde{N}$ .

**Приклад.** Знайти загальний розв'язок рівняння  $(2xy - 5)dx + (3y^2 + x^2)dy = 0$ .

**Розв'язання.**  $P(x, y) = (2xy - 5)$ ,  $Q(x, y) = (3y^2 + x^2)$ . Перевіряємо умову (4):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \text{маємо рівняння у повних диференціалах.}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = (2xy - 5)$  – інтегруємо за  $x$  змінною  $x$  ( $y$  при інтегруванні вважаємо сталою):

$$u(x, y) = \int (2xy - 5)dx = x^2y - 5x + \varphi(y).$$

Останній вираз диференціюємо за змінною  $y$ :  $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \varphi'(y)$

З іншого боку  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = (3y^2 + x^2)$ . Отже, маємо:

$$x^2 + \varphi'(y) = (3y^2 + x^2) \Rightarrow \varphi'(y) = 3y^2 + x^2 - x^2 = 3y^2.$$

Інтегруємо  $\varphi'(y)$  для знаходження  $\varphi(y)$ :

$$\varphi(y) = \int 3y^2 dy = y^3 + C_1.$$

Підставляємо  $\varphi(y)$  в вираз для  $u(x, y)$ :

$$u(x, y) = x^2y - 5x + y^3 + C_1,$$

та записуємо загальний інтеграл рівняння:  $x^2y - 5x + y^3 = C$ .

### Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають зниження порядку

Розглянемо окремі типи рівнянь другого порядку

1.  $y'' = f(x)$ . Порядок рівняння знижується послідовним інтегруванням рівняння.

**Приклад.**  $y'' = \sin 2x$

$$y' = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1$$

$$y = \int \left( -\frac{1}{2} \cos 2x + C_1 \right) dx = -\frac{1}{4} \sin 2x + C_1 x + C_2.$$

2.  $y'' = f(x, y')$ . Рівняння не містить явно шуканої функції. Зниження порядку такого рівняння досягається введенням нової функції  $z(x) = y'$ ,  $z' = y''$ . Рівняння набуває вигляду  $z' = f(x, z)$ . Це вже рівняння I порядку.

**Приклад.**  $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$ .

**Розв'язання.** Задане рівняння не містить шуканої функції  $y$ . Тому позначимо  $y' = z(x)$ , тоді  $y'' = z'$ , вихідне рівняння перетворюється на таке рівняння:  $(1+x^2)z' - 2xz = 0$ . Це лінійне диференціальне рівняння I порядку. Розв'яжемо його:

$$(1+x^2)\frac{dz}{dx} = 2xz, \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2xdx}{1+x^2} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{2xdx}{1+x^2} \Rightarrow \ln z = \ln(1+x^2) + \ln C_1 \Rightarrow z = \tilde{N}_1(1+x^2).$$

Замінюючи  $z$  на  $y'$ , знову приходимо до рівняння I порядку:

$$y' = \tilde{N}_1(1+x^2).$$

Звідки знаходимо  $y = \tilde{N}_1 \int (1+x^2) dx = C_1 \left( x + \frac{x^3}{3} \right) + C_2$ .

3.  $y'' = f(y, y')$ . Рівняння не містить явно незалежної змінної  $x$ . У цьому випадку за нову функцію приймають  $P(y) = y'$ , а за нову незалежну змінну –  $y$ . Тоді  $y'' = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dP}{dy} P$ . Така заміна змінних приводить до диференціального рівняння I порядку:  $P' = f(y, P)$ .

**Приклад 2.**  $yy'' - 2(y')^2 = 0$ .

**Розв'язання.** Задане рівняння не містить явно  $x$ . Тому раціонально виконати таку заміну:  $y' = P(y)$ ,  $y'' = P \frac{dP}{dy} \Rightarrow yP \frac{dP}{dy} - 2P^2 = 0$ .

а)  $P \neq 0$ . Тоді  $y \frac{dP}{dy} = 2P$ . Отримано рівняння з відокремленими змінними.

$$\frac{dP}{P} = 2 \frac{dy}{y} \Rightarrow P = C_1 y^2.$$

Замінюємо  $P$  на  $y'$ , знову одержуємо рівняння першого порядку:

$$y' = C_1 y^2.$$

Відокремлюємо змінні і інтегруємо, знайдемо загальний розв'язок даного рівняння:

$$\frac{dy}{y^2} = C_1 dx \Rightarrow y = \frac{-1}{C_1 x + C_2};$$

б)  $z = 0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C$ , але цей розв'язок міститься в загальному (при  $C_1 = 0$ ).

**Розв'язати наступні диференціальні рівняння:**

1.  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ ,  $y(0) = 0$ .

**Розв'язання.** Це лінійне диференціальне рівняння I порядку. Задані початкові умови, тобто потрібно розв'язати задачу Коші (знайти частинний розв'язок). Для знаходження загального розв'язку скористаємося методом варіації довільної сталої.

1. Розв'язуємо відповідне однорідне рівняння  $y' + 2xy = 0$ .

Відокремлюємо змінні  $\frac{dy}{dx} = -2xy$ ,  $\Rightarrow \frac{dy}{y} = -2xdx$  та інтегруємо

$$\ln|y| = -x^2 + \ln|C|.$$

Представимо  $-x^2 = \ln e^{-x^2}$ . Маємо  $\ln|y| = \ln e^{-x^2} + \ln|C|$ .

Звідки,  $y_0 = Ce^{-x^2}$ .

2. Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y_i = C(x)e^{-x^2}$$

Знаходимо похідну  $y' = C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2}$ .

Підставляємо отримані вирази до рівняння:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}.$$

Звідки, після спрощення маємо  $C'(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}$ , або  $C'(x) = x$ .

Інтегруванням знаходимо  $C(x) = \frac{x^2}{2} + C$ .

Підставляємо знайдену функцію  $C(x)$  в вираз для  $y_i$ :

$$y_i = \left( \frac{x^2}{2} + C \right) e^{-x^2}.$$

Для знаходження частинного розв'язку використаємо початкові умови:

$$0 = \left( \frac{0^2}{2} + C \right) e^{-0^2} \Rightarrow \tilde{N} = 0. \text{ Шуканий частинний розв'язок: } y_{\tilde{}} = \frac{x^2}{2} e^{-x^2}.$$

2.  $x^2 y' - (2x - 1)y = x^2$

**Розв'язання.** Це лінійне диференціальне рівняння I порядку. Розділимо все рівняння на  $x^2$ :

$$y' - \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) y = 1$$

Скористаємося методом Бернуллі. Подамо невідомий розв'язок  $y(x)$  у вигляді добутку двох функцій  $u = u(x)$  та  $v = v(x)$ :

$$y = u \cdot v, \quad y' = u'v + v'u.$$



Підставляємо  $y$  та  $y'$  у рівняння :

$$u'v + v'u - \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot uv = 1,$$

Групуємо другий й третій доданки, та винесемо  $u$  за дужки:

$$u'v + u \left[ v' - \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot v \right] = 1$$

Визначимо функцію  $v$  так, щоб вираз в квадратних дужках дорівнював нулю:

$$v' - \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot v = 0.$$

В цьому рівнянні відокремлюються змінні:

$$\frac{dv}{dx} = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot v \Rightarrow \frac{dv}{v} = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx \Rightarrow$$

$$\ln v = 2 \ln x + \frac{1}{x} \Rightarrow \ln v = \ln x^2 + \ln e^{1/x} \Rightarrow,$$

$$v = x^2 e^{1/x} \quad \text{або} \quad v = x^2 e^{1/x}.$$

Для визначення  $u$  маємо рівняння

$$u'v = 1. \Rightarrow u'x^2 e^{1/x} = 1 \Rightarrow u' = \frac{e^{1/x}}{x^2}.$$

Розв'язок рівняння можна знати інтегруванням:

$$u = \int \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = -\int e^{1/x} d(1/x) = -e^{1/x} + C. \Rightarrow$$

Отже,  $y = u \cdot v = (-e^{1/x} + C)x^2 e^{1/x}$ .

*Завдання для самостійного розв'язання:*

Лінійні диференціальні рівняння розв'язати двома методами

3)  $y' + y \operatorname{ctg} x = \frac{e^{2x}}{\sin x}$ .

4)  $x' - x \cos y = \sin 2y$ .

Для розв'язання рівняння Бернуллі використати метод Бернуллі.

5)  $y' - \frac{y}{x} = \frac{5}{2y}$ .

Знайти загальний розв'язок рівняння в повних диференціалах:

6)  $(x + y)dx + (x + y - 1)dy = 0$

Розв'язати рівняння, що допускають зниження порядку.

7)  $y''' = \cos 5x - 3x$

8)  $y'' - \frac{y'}{x} = 0$ .

**Домашнє завдання**

Виконати завдання 1 третьої частини Індивідуального завдання.

Виконане завдання надіслати для перевірки на адресу [i.morachkovska@gmail.com](mailto:i.morachkovska@gmail.com)