

VII. Определенный интеграл и его приложения

1. Некоторые задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Задача 1. Вычисление пройденного пути при неравномерном движении. Пусть точка движется по прямолинейной траектории с переменной скоростью $V(t)$. Вычислим путь s , пройденный этой точкой за время от момента $t = t_0$ до момента $t = T$.

Разобьем мысленно промежуток $[t_0, T]$ на n частей (не обязательно одинаковых) моментами t_1, t_2, \dots, t_{n-1} . Обозначим

$$t_1 - t_0 = \Delta t_1, \quad t_2 - t_1 = \Delta t_2, \quad \dots, \quad T - t_{n-1} = \Delta t_n.$$

В каждом из промежутков $[t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1, n}$ возьмем произвольный момент τ_k (в частности, это может быть t_{k-1} или t_k) и вычислим $V(\tau_k)$. Найдем произведение $V(\tau_k)\Delta t_k$. Это – путь, который прошла бы точка за время Δt_k , если бы она на этом отрезке времени двигалась с постоянной скоростью $V(\tau_k)$. Поэтому можно обозначить $\Delta s_k = V(\tau_k)\Delta t_k$. Составим теперь сумму по всем k от 1 до n :

$$\tilde{s} = V(\tau_1)\Delta t_1 + V(\tau_2)\Delta t_2 + \dots + V(\tau_n)\Delta t_n,$$

$$\text{т. е.} \quad \tilde{s} = \sum_{k=1}^n V(\tau_k)\Delta t_k.$$

Это – путь, который прошла бы точка за время $[t_0, T]$, если бы она на каждом из отрезков времени Δt_k двигалась равномерно со скоростью $V(\tau_k)$, т.е. если бы ее скорость за время $[t_0, T]$ изменялась не плавно, а скачками в моменты t_1, t_2, \dots, t_{n-1} . Чем меньше промежутки Δt_k , тем, очевидно, ближе должно быть найденное \tilde{s} к искомому s . Обозначим $\lambda = \max_k \{\Delta t_k\}$. Предположим теперь, что $\lambda \rightarrow 0$. Это значит, что продолжительность каждого из промежутков Δt_k стремится к нулю (при этом их число n , разумеется, неограниченно растет). Предел

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n V(\tau_k)\Delta t_k \quad (7.1)$$

и является, как легко видеть, искомой величиной.

Задача 2. Вычисление массы неоднородного стержня. Пусть стержень занимает промежуток $[0, l]$ оси Ox и пусть его линейная плотность есть известная функция $\rho(x)$. Вычислим массу этого стержня.

Разобьем мысленно стержень на n частей точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} ,

обозначим $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $k = 1, 2, \dots, n$,^{*)} и в каждом из промежутков $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку ξ_k , рис. 7.1.

Вычислим $\rho(\xi_k)$ и найдем величину $\Delta m_k = \rho(\xi_k) \Delta x_k$.

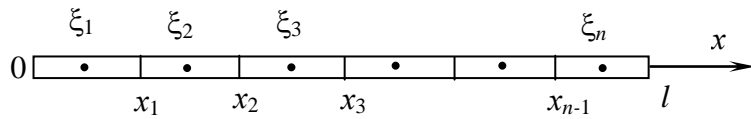


Рис. 7.1

Это – масса, которую имел бы участок Δx_k , если бы он имел равномерную плотность $\rho(\xi_k)$. Составим сумму

$$\tilde{m} = \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k) \Delta x_k.$$

Она равна массе стержня, если его плотность изменялась бы не плавно, а скачками при переходе через точки x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Обозначим $\lambda = \max_k \{\Delta x_k\}$.

Тогда, очевидно, искомая масса равна

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(\xi_k) \Delta x_k. \quad (7.2)$$

Аналогично предыдущей задаче, соотношение $\lambda \rightarrow 0$ означает здесь, что стержень подвергается неограниченному дроблению, т. е. что каждый из участков Δx_k стягивается в точку ξ_k .

Задача 3. Вычисление количества электричества при переменной силе тока. Пусть через сечение проводника течет ток силы $I(t)$. Вычислим количество электричества, протекающего через это сечение за время $[t_0, T]$.

Разобьем промежуток $[t_0, T]$ на n частей моментами t_1, t_2, \dots, t_{n-1} и обозначим $t_k - t_{k-1} = \Delta t_k$. Количество электричества, протекающего через сечение проводника за время Δt_k , приближенно равно

$$\Delta Q_k = I(\tau_k) \Delta t_k,$$

где $\tau \in [t_{k-1}, t_k]$. Составим сумму

$$\tilde{Q} = \sum_{k=1}^n I(\tau_k) \Delta t_k.$$

Это – количество электричества, которое протекло бы через данное сечение, если бы сила тока изменялась не плавно, а скачками. Полагая $\lambda = \max_k \{\Delta t_k\}$, получим для искомого количества электричества

^{*)} Для единства обозначений мы положим $x_0 = 0$, $x_n = l$

$$Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n I(\tau_k) \Delta t_k. \quad (7.3)$$

Легко видеть, что все эти (и другие, подобные им) задачи решаются с математической точки зрения совершенно одинаково. При этом они по своей постановке противоположны соответствующим задачам, приведшим к понятию производной. Поэтому приведенные здесь задачи 1°, 2°, 3° также приводят к математическому понятию, в некотором смысле противоположному понятию производной: понятию определенного интеграла.

2. Определенный интеграл и его геометрический смысл

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция $f(x)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} и положим $x_0 = a$, $x_n = b$. Обозначим $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$. В каждом из промежутков $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку ξ_k , вычислим значение функции $f(x)$ в этой точке и умножим результат на Δx_k . Получим величину $f(\xi_k) \Delta x_k$. Составим сумму этих произведений по всем участкам:

$$\tilde{S} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Она называется интегральной суммой для функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$.

Обозначим теперь $\lambda = \max_k \{\Delta x_k\}$ и предположим, что $\lambda \rightarrow 0$, т. е. что промежуток $[a, b]$ подвергается неограниченному дроблению. Если при этом существует предел интегральной суммы (ее в этом случае обозначают не \tilde{S} , а \tilde{S}_λ), и этот предел не зависит от способа дробления промежутка $[a, b]$, то он называется определенным интегралом функции $f(x)$ на про-

межутке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$, а сама функция $f(x)$ называется в

этом случае интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Итак, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \quad (7.4)$$

Функцию $f(x)$ в интервале называют подынтегральной функцией, выражение $f(x) dx$ – подынтегральным выражением, а числа a и b – соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

На основании формулы (7.4) результаты задач предыдущего параграфа, выражаемые равенствами (7.1), (7.2) и (7.3), можно записать теперь так

$$s = \int_{t_0}^T V(t)dt, \quad m = \int_0^l \rho(x)dx,$$

$$Q = \int_{t_0}^T I(t)dt.$$

Отметим, что если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$, то она ограничена в нем. Действительно, если бы при $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$ не была

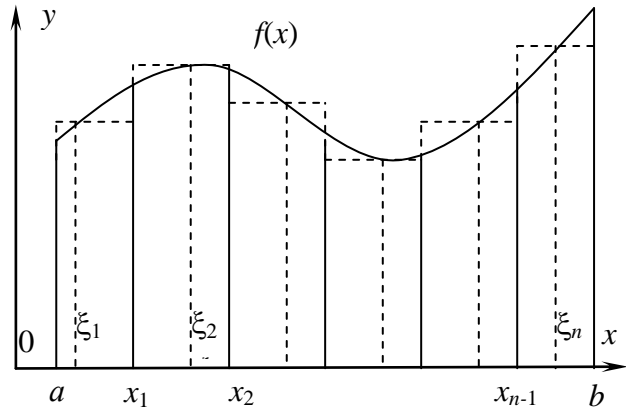


Рис. 7.2

ограниченной, то интегральная сумма \tilde{S}_λ могла бы содержать в себе и неограниченные слагаемые, и тогда ее предел не существовал бы. Итак, ограниченность функции является необходимым условием ее интегрируемости на данном отрезке.

Выясним геометрический смысл определенного интеграла. Для большей наглядности предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$. Кроме того, будем считать, что $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Тогда $f(\xi_k)\Delta x_k$ есть площадь прямоугольника с основанием Δx_k и высотой $f(\xi_k)$. Следовательно,

величина $\tilde{S} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$ — это

площадь ступенчатой фигуры с основанием $[a, b]$, т. е. площадь под графиком, который имела бы функция $f(x)$, если бы она в промежутке $[a, b]$ изменялась бы не плавно, а скачками при переходе через

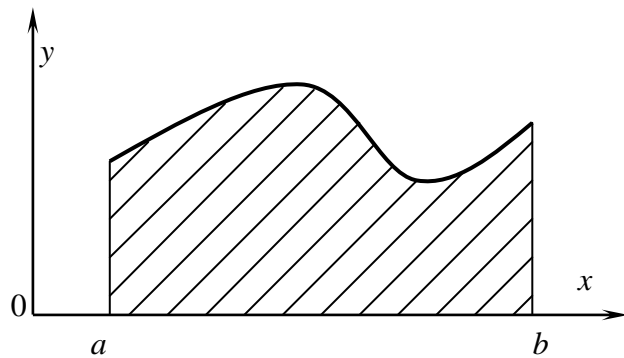


Рис. 7.3

точки x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , рис. 7.2. Если $\lambda \rightarrow 0$, то ступенчатая фигура в пределе превращается в так называемую криволинейную трапецию с основанием $[a, b]$ и верхней границей $y = f(x)$, рис. 7.3.

Итак, если функция $f(x)$ интегрируема в промежутке $[a, b]$, непре-

рывна и неотрицательна в нем, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически пред-

ставляет собой площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и $y = f(x)$.

Случай разрывности функции $f(x)$, а также случаи, когда $f(x) \leq 0$ хотя бы на части промежутка $[a, b]$, будут затронуты ниже.

Отметим, в заключение, два следующих очевидных факта, вытекающих из определения (7.4):

а) если a и b – постоянные числа, то и интеграл $\int_a^b f(x)dx$ есть постоянное число;

б) интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

и т. д.

3. Суммы Дарбу и их свойства

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и ограничена на нем. Разобьем этот отрезок на n частей точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} и обозначим $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$. Поскольку функция $f(x)$, очевидно, ограничена в каждом из промежутков $[x_{k-1}, x_k]$, то существуют числа $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$ и

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Составим суммы

$$s = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k,$$

$$S = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k.$$

Геометрический смысл сумм s и S легко угадывается из рис. 7.4 и рис. 7.5, соответственно.

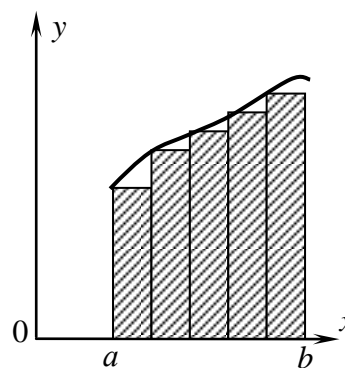


Рис. 7.4

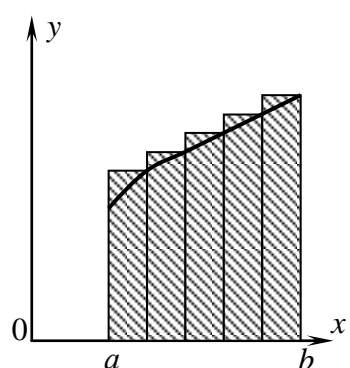


Рис. 7.5

Суммы s и S называют нижней и верхней суммами Дарбу на отрезке $[a, b]$.

Поскольку для всех $k = 1, 2, \dots, n$ при любом $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ будет

$$m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k,$$

то, умножая эти неравенства на Δx_k и суммируя по всем k , получим

$$s \leq \tilde{S} \leq S.$$

Если разбиение отрезка $[a, b]$ – фиксированное, то s и S – постоянные числа, а \tilde{S} есть переменная величина, зависящая от выбора точек ξ_k . Из определения точной верхней грани следует, что за счет выбора точек ξ_k величины $f(\xi_k)$ можно сделать сколь угодно близкими к соответствующим числам M_k (рис. 7.6), а значит величину \tilde{S}

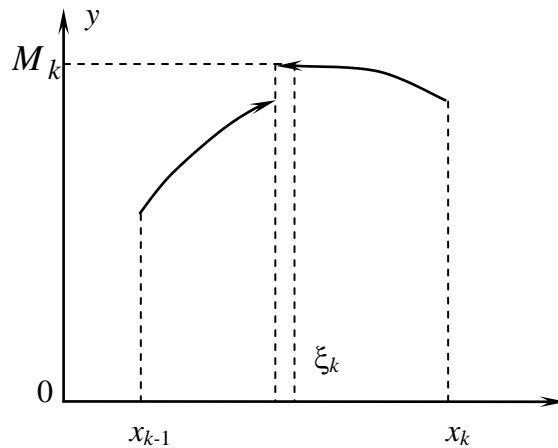


Рис. 7.6

можно сделать сколь угодно близкой к S . Отсюда и из того, что $\tilde{S} \leq S$, следует, что при данном разбиении отрезка $[a, b]$ и при всевозможных наборах чисел $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ будет

$$S = \sup \tilde{S}.$$

Совершенно аналогично убеждаемся, что в том же смысле

$$s = \inf \tilde{S}.$$

Установим два свойства сумм Дарбу.

1. При добавлении к имеющимся точкам деления новых точек нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя – не увеличивается.

■ Достаточно рассмотреть случай, когда к уже имеющимся точкам $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ *) добавляется новая точка x^* , такая, что $x_{i-1} < x^* < x_i$ (рис. 7.7).

Пусть S' – новая верхняя сумма. Если в старой сумме S отрезку $[x_{i-1}, x_i]$ отвечало слагаемое $M_i(x_i - x_{i-1})$, то в новой

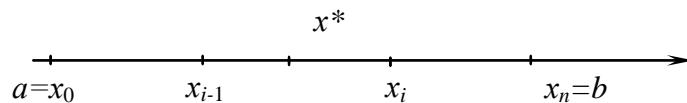


Рис. 7.7

верхней сумме S' этому отрезку отвечает сумма двух слагаемых

$$M'_i(x^* - x_{i-1}) + M''_i(x_i - x^*),$$

где $M'_i = \sup_{[x_{i-1}, x^*]} f(x)$, $M''_i = \sup_{[x^*, x_i]} f(x)$. Но $[x_{i-1}, x^*] \subset [x_{i-1}, x_i]$ и

$[x^*, x_i] \subset [x_{i-1}, x_i]$, то $M'_i \leq M_i$, $M''_i \leq M_i$, а значит

*) Как и прежде, мы полагаем $x_0 = a$, $x_n = b$.

$$M_i'(x^* - x_{i-1}) + M_i''(x_i - x^*) \leq M_i(x^* - x_{i-1}) + M_i(x_i - x^*) = M_i(x_i - x_{i-1}),$$

откуда и следует, что $S' \leq S$.

Аналогично убеждаемся, что $s' \geq s$. \square

2. Любая нижняя сумма Дарбу (т. е. нижняя сумма, отвечающая любому разбиению отрезка $[a, b]$) не превосходит любой из верхних сумм (даже если она отвечает другому разбиению).

■ Возьмем произвольное разбиение и пусть для него нижняя и верхняя суммы Дарбу равны соответственно s_1 и S_1 . Возьмем теперь некоторое другое разбиение и отвечающие ему суммы Дарбу обозначим s_2 и S_2 .

Для доказательства объединим точки обоих разбиений. Получим новое разбиение, которому отвечают суммы s_3 и S_3 . В силу свойства 1, имеем

$$s_1 \leq s_3, S_3 \leq S_2,$$

а так как $s_3 \leq S_3$, то

$$s_1 \leq S_2,$$

что и требовалось доказать. \square

Пусть S – произвольная верхняя сумма. Тогда для всех нижних сумм, на основании свойства 2, будет $s \leq S$, т. е. множество $\{s\}$ всех нижних сумм ограничено сверху. Следовательно, существует число $\sigma = \sup\{s\}$, причем $\sigma \leq S$. Но здесь S – любая из верхних сумм, а значит для всех верхних сумм будет $S \geq \sigma$. Следовательно, множество $\{S\}$ всех верхних сумм ограничено снизу, а значит существует число $\Sigma = \inf\{S\}$, причем $\Sigma \geq \sigma$.

Итак, для любой верхней и для любой нижней сумм Дарбу будет

$$s \leq \sigma \leq \Sigma \leq S. \quad (7.5)$$

4. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции

Теорема 7.1. Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируема на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для этой функции и этого отрезка выполнялось условие

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S_\lambda - s_\lambda) = 0. \quad (7.6)$$

Необходимость. ■ Пусть интеграл $I = \int_a^b f(x)dx$ существует. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$(\lambda < \delta) \Rightarrow (|\tilde{S}_\lambda - I| < \varepsilon),$$

т. е.

$$(\Delta x_k < \delta, \forall k = \overline{1, n}) \Rightarrow (I - \varepsilon < \tilde{S}_\lambda < I + \varepsilon) \quad (7.7)$$

для любого набора чисел $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Беря подходящие наборы чисел ξ_k , можно получать значения \tilde{S}_λ , сколь угодно близкие к $\inf \tilde{S}_\lambda$ т. е. к s_λ , а также значения \tilde{S}_λ , сколь угодно близкие к $\sup \tilde{S}_\lambda$, т.е. к S_λ . Поэтому из (7.7) следует, что

$$(\lambda < \delta) \Rightarrow (I - \varepsilon \leq s_\lambda \leq S_\lambda \leq I + \varepsilon),$$

а поскольку ε можно взять сколь угодно малым, то это означает, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} s_\lambda = I, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\lambda = I,$$

откуда и следует (7.6). \square

Достаточность. \blacksquare Пусть условие (7.6) выполнено. На основании (7.5), это означает, что $\sigma = \Sigma$. Обозначая через I общее значение чисел σ и Σ , получим вместо (7.5)

$$s_\lambda \leq I \leq S_\lambda. \quad (7.8)$$

Здесь s_λ и S_λ – нижняя и верхняя суммы, отвечающие некоторому разбиению.

Пусть \tilde{S}_λ – какая-нибудь из интегральных сумм, отвечающих этому разбиению. Тогда

$$s_\lambda \leq \tilde{S}_\lambda \leq S_\lambda.$$

Отсюда и из (7.8) следует, что $|\tilde{S}_\lambda - I| \leq S_\lambda - s_\lambda$. Но, в силу условия (7.6), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$(\lambda < \delta) \Rightarrow (S_\lambda - s_\lambda < \varepsilon),$$

а значит тем более

$$(\lambda < \delta) \Rightarrow (|\tilde{S}_\lambda - I| < \varepsilon),$$

откуда и следует, что $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{S}_\lambda$, т.е. что $I = \int_a^b f(x) dx$. \square

5. Интегрируемость непрерывной функции

Теорема 7.2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она и интегрируема на нем.

\blacksquare Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она, в силу теоремы Кантора 3.20, и равномерно непрерывна на нем. Следовательно, для выбранного ε найдется такое $\delta > 0$, что для любых $x' \in [a, b]$ и $x'' \in [a, b]$ будет

$$(|x' - x''| < \delta) \Rightarrow (|f(x') - f(x'')| < \varepsilon). \quad (7.9)$$

Разделим отрезок $[a, b]$ точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} на n частей так, чтобы длина каждой из них была меньше, чем δ , т. е. чтобы было $\Delta x_k < \delta, \forall k = \overline{1, n}$, а значит и $\lambda < \delta$. Далее, пусть снова $m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x), M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$,

и пусть x'_k и x''_k — точки отрезка $[x_{k-1}, x_k]$, в которых достигаются значения m_k и M_k (рис. 7.7); эти точки существуют, на основании 2-ой теоремы Вейерштрасса. Поскольку, очевидно,

$$|x' - x''| \leq \Delta x_k, \text{ а } \Delta x_k < \delta, \text{ то и } |x' - x''| < \delta,$$

а значит, в силу (7.9), в этом случае

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

т. е.

$$M_k - m_k < \varepsilon.$$

Итак, если $\Delta x_k < \delta, \forall k = \overline{1, n}$, т. е. $\lambda < \delta$, то

$$S - s = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k - \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \varepsilon(b - a).$$

Поскольку ε можно взять сколь угодно малое, то отсюда следует, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (S - s) = 0,$$

а отсюда, в свою очередь, вытекает интегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Пример 7.1. Вычислим интеграл $I = \int_0^{\pi} \sin x dx$.

Поскольку функция $\sin x$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, то она и интегрируема на нем. Поэтому предел интегральной суммы существует при любых способах дробления отрезка $[0, \pi]$. Для простоты разобьем отрезок на n равных частей точками $x_1 = \frac{\pi}{n}, x_2 = \frac{2\pi}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{(n-1)\pi}{n}$ и в качестве точек ξ_k возьмем правые концы отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, т. е. положим

$$\xi_1 = \frac{\pi}{n}, \xi_2 = \frac{2\pi}{n}, \dots, \xi_n = \frac{n\pi}{n}.$$

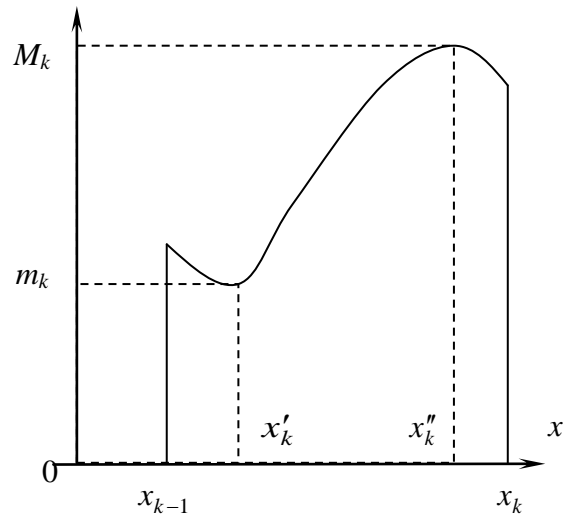


Рис. 7.7

Получим

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \sin \xi_1 \cdot \Delta x_1 + \sin \xi_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + \sin \xi_n \cdot \Delta x_n = \\ &= \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \frac{\pi}{n}.\end{aligned}$$

Используя формулу (см. раздел VI)

$$\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi = \frac{\sin \frac{(n+1)\varphi}{2} \sin \frac{n\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}},$$

будем иметь

$$\tilde{S} = \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{2n} \cdot \sin \frac{\pi n}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{n}.$$

Пусть теперь $\lambda \rightarrow 0$; это значит, что $n \rightarrow \infty$. Получим

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin \frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{2n}} = 2.$$

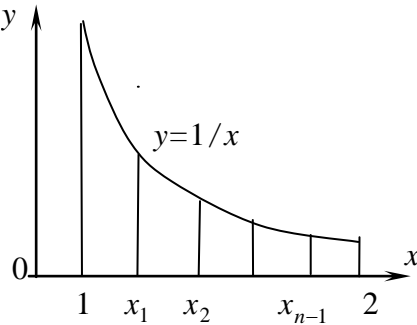


Рис. 7.8

Пример 7.2. Вычислим интеграл

$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$. С этой целью отрезок $[1, 2]$ разобьем

точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} так, чтобы числа x_k образовывали геометрическую прогрессию:

$$x_1 = q, \quad x_2 = q^2, \quad x_3 = q^3, \dots, x_n = q^n;$$

при этом $x_0 = 1 = q^0$. Поскольку $q^n = 2$, то $q = \sqrt[n]{2}$.

Итак, получаем

$$x_1 = \sqrt[n]{2}, \quad x_2 = (\sqrt[n]{2})^2, \quad \dots, x_n = (\sqrt[n]{2})^n,$$

а значит

$$\begin{aligned}\tilde{S} &= \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{x_k} = (\sqrt[n]{2} - 1) \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \left[(\sqrt[n]{2})^2 - \sqrt[n]{2} \right] \frac{1}{(\sqrt[n]{2})^2} + \dots + \\ &+ \left[(\sqrt[n]{2})^n - (\sqrt[n]{2})^{n-1} \right] \frac{1}{(\sqrt[n]{2})^n} =\end{aligned}$$

$$= n - \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \right) = n - \frac{n}{\sqrt[n]{2}} = n \left(1 - 2^{-\frac{1}{n}} \right).$$

Следовательно,

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{S} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^{-\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{-\frac{1}{n}} - 1}{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{n} \ln 2}{-\frac{1}{n}} = \ln 2.$$

6. Интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва

Теорема 7.3. Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$ и имеет на нем лишь конечное число точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке (рис. 7.9).

Примером функции, удовлетворяющей условиям этой теоремы, может служить функция $\sin \frac{1}{x}$, рассматриваемая на отрезке $[-\pi, \pi]$ (см. пример 3.19). В точке $x = 0$ она имеет разрыв 2-го рода, однако всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет неравенству $\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$.

Заметим, что если все разрывы функции на отрезке $[a, b]$ – 1-го рода и их – конечное число, то эту функцию называют кусочно-непрерывной на этом отрезке.

■ При доказательстве теоремы можно, не ограничивая общности, предполагать, что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет единственную точку разрыва x^* , причем $x^* \in (a, b)$. Возь-

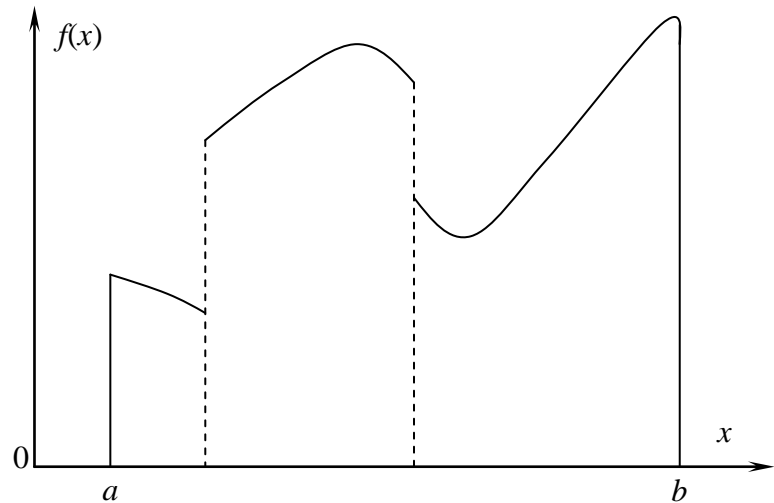


Рис. 7.9

мем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим интервал $C_\varepsilon(x^*)$, а также два оставшихся промежутка: $E_1 = [a, x^* - \varepsilon]$ и $E_2 = [x^* + \varepsilon, b]$ (промежутки E_1 и E_2 – замкнутые, поскольку интервал $C_\varepsilon(x^*)$ – открытый). На основании тео-

ремы Кантора, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любых $x', x'' \in E_1$ или $x', x'' \in E_2$ будет

$$(|x' - x''| < \delta) \Rightarrow (|f(x') - f(x'')| < \varepsilon). \quad (7.10)$$

При этом можно считать, что $\delta < \varepsilon$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} на n частей так, чтобы для всех $k = 1, 2, \dots, n$ было $\Delta x_k < \delta$. Отрезки Δx_k разделим на две группы. К группе I отнесем те отрезки, которые полностью лежат вне $C_\varepsilon(x^*)$, а к группе II – те отрезки, которые полностью или хотя бы частично принадлежат $C_\varepsilon(x^*)$.

Как и в доказательстве теоремы 7.2, рассмотрим величину

$$S - s = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k.$$

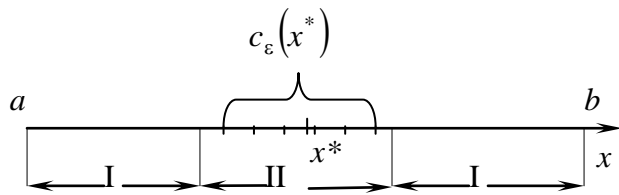


Рис. 7.10

В данном случае она разбивается

на две суммы, отвечающие отрезкам I и II групп. Для группы I имеем, в силу (7.10),

$$\sum_I (M_k - m_k) \Delta x_k < \varepsilon \sum_I \Delta x_k < \varepsilon(b - a).$$

Далее, положив $M = \sup_{[a, b]} f(x)$, $m = \inf_{[a, b]} f(x)$, получим для 2-ой суммы

$$\sum_{II} (M_k - m_k) \Delta x_k \leq (M - m) \sum_{II} \Delta x_k \leq (M - m)(2\varepsilon + 2\delta) < 4(M - m)\varepsilon.$$

Итак,

$$(\Delta x_k < \delta, \forall k = 1, 2, \dots, n) \Rightarrow (S - s < \varepsilon[b - a + 4(M - m)]),$$

а так как ε можно взять сколь угодно малое, то отсюда и следует утверждение теоремы. \square

Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то, очевидно, что интеграл

$\int_a^b f(x) dx$ геометрически пред-

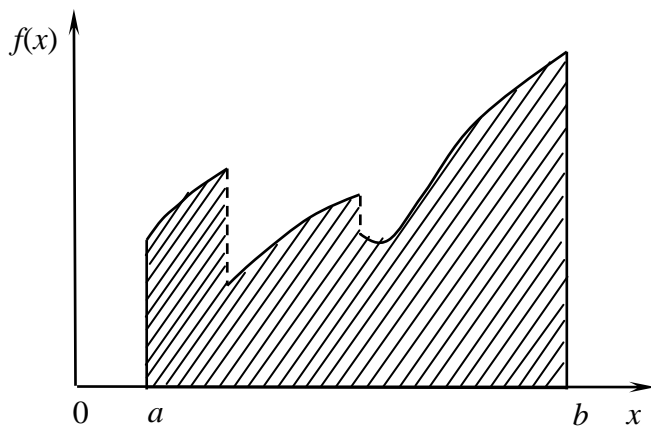


Рис. 7.11

ставляет собой площадь заштрихованной фигуры (см. рис. 7.11).

7. Теорема о квазиинтегральной сумме

Пусть функция $f(x) = \varphi(x)q(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n частей точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} и на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольные точки ξ_k и η_k . Составим сумму

$$S^* = \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k)q(\eta_k)\Delta x_k.$$

Если бы было $\eta_k = \xi_k, \forall k = 1, 2, \dots, n$, то сумма S^* была бы интегральной суммой для функции $f(x) = \varphi(x)q(x)$ на отрезке $[a, b]$. Если же, вообще говоря, $\eta_k \neq \xi_k$, то величину S^* назовем квазиинтегральной суммой.

Теорема 7.4. Если функции $\varphi(x)$ и $q(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\lambda^* = \int_a^b \varphi(x)q(x)dx. \quad (7.11)$$

■ Перепишем величину S^* так

$$S^* = \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k)q(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k)[q(\eta_k) - q(\xi_k)]\Delta x_k,$$

или, для краткости,

$$S^* = \tilde{S} + \check{S}.$$

Поскольку \tilde{S} – интегральная сумма для функции $\varphi(x)q(x)$, а эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ то

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{S}_\lambda = \int_a^b \varphi(x)q(x)dx,$$

и остается доказать, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \check{S}_\lambda = 0. \quad (7.12)$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует такое $M > 0$, что $|\varphi(x)| \leq M$ для всех $x \in [a, b]$. Далее, поскольку функция $q(x)$ также непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, по теореме Кантора, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых $x', x'' \in [a, b]$ будет

$$(|x' - x''| < \delta) \Rightarrow (|q(x') - q(x'')| < \varepsilon).$$

Поэтому, если $\lambda < \delta$, то $|q(\eta_k) - q(\xi_k)| < \varepsilon, \forall k$, а значит

$$|\tilde{S}_\lambda| \leq \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k) [q(\eta_k) - q(\xi_k)] \Delta x_k < M\varepsilon \sum_{k=1}^n \Delta x_k = M\varepsilon(b-a),$$

а так как ε может быть сколь угодно малое, то отсюда и следует (7.12), а значит и (7.11). \square

Примечание. Легко убедиться, что одна из функций $\varphi(x)$ и $q(x)$ в теореме 7.4 может быть и не непрерывной, а лишь кусочно-непрерывной.

8. Простейшие свойства определенного интеграла

$$1^\circ. \int_a^b dx = b - a,$$

т. е. если $f(x) \equiv 1$, то интеграл равен разности верхнего и нижнего пределов интегрирования (существование последнего интеграла следует из очевидной непрерывности подынтегральной функции).

■ Действительно, в этом случае равенство (7.4) дает

$$\begin{aligned} \int_a^b dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \dots + (b - x_{n-1})] = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} (b - a) = b - a. \square \end{aligned}$$

Геометрически свойство (1^o) выражает тот очевидный факт, что если высота прямоугольника равна 1, то его площадь численно равна длине основания (рис. 7.12).

2^o. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, а $c = \text{const}$, то и функция $cf(x)$ интегрируема на этом отрезке, и

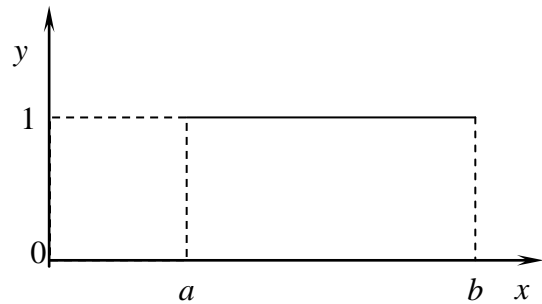


Рис. 7.12

$$\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx, \quad (7.13)$$

т. е. постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла.

■ Действительно, для любого разбиения отрезка $[a, b]$ имеем

$$\sum_{k=1}^n cf(\xi_k) \Delta x_k = c \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Отсюда при $\lambda \rightarrow 0$, учитывая, что предел $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$ по условию су-

существует, убеждаемся и в существовании предела $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n cf(\xi_k)\Delta x_k$, а

также в выполнении равенства (7.13). \square

3°. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то и функция $f(x) + \varphi(x)$ интегрируема на этом отрезке, и

$$\int_a^b [f(x) + \varphi(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (7.14)$$

т. е. интеграл суммы интегрируемых функций равен сумме их интегралов.

■ Действительно, если взять для всех сумм одно и то же разбиение и одни и те же точки ξ_k , будем иметь

$$\sum_{k=1}^n [f(\xi_k) + \varphi(\xi_k)] \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k) \Delta x_k.$$

Отсюда при $\lambda \rightarrow 0$, учитывая существование пределов обеих сумм в правой части, получим, что и предел левой части существует и удовлетворяет формуле (7.14). \square

Очевидно, что свойство (3°) верно и для случая любого конечного числа слагаемых.

4°. Если $f(x)$ – интегрируемая и неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция, то

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

■ Действительно, в этом случае, в силу (7.4), интеграл $\int_a^b f(x) dx$ есть

предел суммы неотрицательных слагаемых, а значит и он неотрицателен. \square

5°. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \geq \varphi(x)$ для всех $x \in [a, b]$, то и

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (7.15)$$

т. е. функциональные неравенства можно интегрировать.

■ Действительно, для всех $x \in [a, b]$ будет $f(x) - \varphi(x) \geq 0$, а значит, на основании свойства (4°),

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx \geq 0,$$

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx \geq 0,$$

или, в силу свойств 3° и 2°,

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varphi(x) dx \geq 0,$$

откуда и следует (7.15). □

Геометрический смысл свойства (5°) совершенно очевиден, рис. 7.13.

6°. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ интегрируема на этом отрезке, и

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad (7.16)$$

■ Обозначим $M_k^* = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} |f(x)|$, $m_k^* = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} |f(x)|$. Очевидно, что

$M_k^* - m_k^* \leq M_k - m_k$ (см. рис. 7.14). Поэтому для функции $|f(x)|$ получим

$$S^* - s^* = \sum_{k=1}^n (M_k^* - m_k^*) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k, \text{ откуда, учитывая также, что } S^* \geq s^*,$$

будем иметь

$$0 \leq S^* - s^* \leq S - s.$$

Но, по условию, $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S_\lambda - s_\lambda) = 0$. $M_k^* = M_k$

Следовательно, и $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S_\lambda^* - s_\lambda^*) = 0$,

а значит функция $|f(x)|$ интегрируема.

Далее, поскольку

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k,$$

то и

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k$$

На основании непрерывности модуля перепишем это так

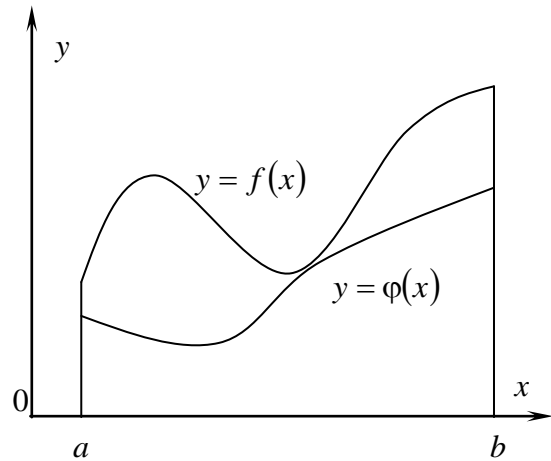


Рис. 7.13

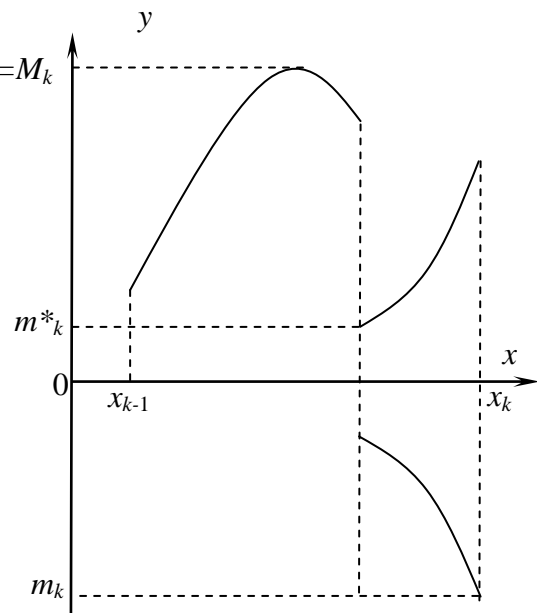


Рис. 7.14

$$\left| \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \right| \leq \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)| \Delta x_k,$$

откуда и следует (7.16). \square

9. Свойство аддитивности интеграла

Сделаем предварительно одно замечание. До сих пор, рассматривая интеграл $\int_a^b f(x) dx$, мы молча предполагали, что $a < b$. Если же $a > b$, и функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то, по определению,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (7.17)$$

Это можно мотивировать следующим образом. Символ $\int_a^b f(x) dx$ означает, что нумерация точек x_1, x_2, \dots, x_{n-1} ведется от точки a к точке b . Поэтому, если $b < a$, то $\Delta x_k < 0, \forall k$, и вместо (7.4) получим равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |\Delta x_k|,$$

т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Легко видеть, что доказанные выше свойства 1°-3° верны и для случая, когда $a > b$. В свойствах же (4°) и (5°) предположение о том, что $a < b$ необходимо (в случае, если $a > b$, неравенства, выражающие эти свойства, изменяют смысл). Наконец, в свойстве (6°) 6° при $a > b$ вместо (7.16), очевидно, надо писать

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right|.$$

Заметим также, что, на основании (7.17), естественно – также по определению – положить

$$\int_a^a f(x)dx=0,$$

что согласуется и с геометрическим смыслом интеграла.

Теорема 7.5. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a, b]$, $[b, c]$, $[a, c]$, то она интегрируема и на двух других отрезках, и при этом

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx, \quad (7.18)$$

каково бы ни было взаимное расположение точек a, b, c .

■ Предположим сначала, что $a < b < c$, и, следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, c]$. Разобьём этот отрезок на n частей так, чтобы точка $x = b$ оказалась одной из точек деления. Тогда для этого отрезка будет

$$S_\lambda - s_\lambda = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{[a,b]} (M_k - m_k) \Delta x_k + \sum_{[b,c]} (M_k - m_k) \Delta x_k.$$

По условию, предел левой части равен нулю при $\lambda \rightarrow 0$, а так как обе суммы, стоящие справа, неотрицательны, то и каждая из них стремится к нулю при $\lambda \rightarrow 0$, а значит интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_b^c f(x)dx$ существуют*).

Далее, в этом случае

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{[a,b]} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{[b,c]} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

и, переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим формулу (7.18).

Пусть теперь, например, $a < c < b$, рис. 7.15, и, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда, по уже доказанному,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

т. е.

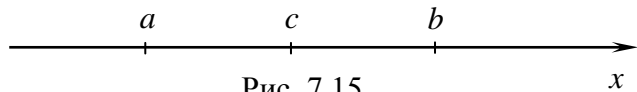


Рис. 7.15

*) Легко видеть, что мы фактически доказали следующее утверждение.

Теорема 7.5'. Если функция интегрируема на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и на любом отрезке $[c, d] \subset [a, b]$

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx,$$

или, на основании (7.17),

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx,$$

что опять таки совпадает с (7.18).□

10. Интегральные теоремы о среднем

Теорема 7.6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $m = \inf_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup_{[a,b]} f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a), \quad (7.19)$$

где $m \leq \mu \leq M$.

■ Действительно, поскольку для всех $x \in [a, b]$ будет

$$m \leq f(x) \leq M, \quad (7.20)$$

то, в силу свойства (5°),

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx,$$

или, на основании свойств (1°) и (2°),

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

т. е.

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M, \quad (7.21)$$

а значит

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = \mu,$$

где $m \leq \mu \leq M$. Отсюда и следует равенство (7.19).

При доказательстве молча предполагалось, что $a < b$. Однако легко видеть, что при $a > b$ из (7.20) все равно вытекает (7.21), а значит и доказательство теоремы остается в силе и при $a > b$. \square

Примечание. Наиболее интересен случай, когда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда числа M и m превращаются соответственно в $\max_{[a, b]} f(x)$ и $\min_{[a, b]} f(x)$, и, в силу 2-й теоремы Больцано – Коши существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(\xi) = \mu$. Следовательно, для этого случая теорема 7.6 принимает вид.

Теорема 7.6'. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует, по крайней мере одна такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a). \quad (7.22)$$

Последняя формула имеет простой геометрический смысл. Она выражает тот факт, что площадь криволинейной трапеции равна площади некоторого прямоугольника с тем же основанием $[a, b]$ и с некоторой «средней» высотой $f(\xi)$, рис. 7.16. В связи с этим число $f(\xi)$ из равенства (7.22) называют интегральным средним функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Теорема 7.7. Если функции $\varphi(x)$ и $f(x)\varphi(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, причем функция $f(x)$ удовлетворяет на этом отрезке неравенству $m \leq f(x) \leq M$, а функция $\varphi(x)$ не меняет знака на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (7.23)$$

где $m \leq \mu \leq M$.

■ Пусть сначала $\varphi(x) \geq 0$ всюду на отрезке $[a, b]$. Тогда из неравенства $m \leq f(x) \leq M$ следует, что для всех $x \in [a, b]$ будет

$$m\varphi(x) \leq f(x)\varphi(x) \leq M\varphi(x),$$

откуда

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx, \quad (7.24)$$

т. е.

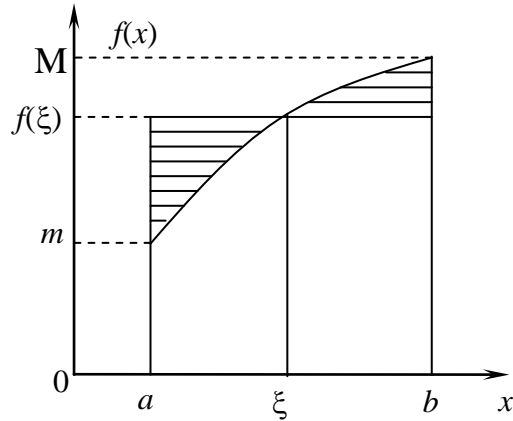


Рис. 7.16

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx} \leq M, \quad (7.25)$$

а значит

$$\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx} = \mu,$$

а так как $m \leq \mu \leq M$, то формула (7.23) для этого случая доказана.

Заметим, что при переходе от (7.24) к (7.25) мы предполагали, что $\int_a^b \varphi(x)dx \neq 0$ (т. е. что $\int_a^b \varphi(x)dx > 0$). Но при $\int_a^b \varphi(x)dx = 0$ мы из (7.24) получили бы

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = 0,$$

и формула (7.23) все равно оказалась бы верной.

Пусть теперь $\varphi(x) \leq 0$ всюду на отрезке $[a, b]$. Тогда $-\varphi(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, и значит, в силу уже доказанного,

$$\int_a^b f(x)[- \varphi(x)]dx = \mu \int_a^b [- \varphi(x)]dx.$$

Если вынести множитель (-1) за знак обоих интегралов и сократить на него, снова получим (7.23).

Итак, теорема 7.7 полностью доказана. Легко видеть, что она верна и при $a > b$. \square

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\mu = f(\xi)$, где $\xi \in (a, b)$. Поэтому приходим к следующему частному случаю теоремы 7.7.

Теорема 7.7'. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $\varphi(x)$ не меняет на нем знака, то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x)dx,$$

где $\xi \in (a, b)$.

Теоремы 7.6 и 7.7 называют соответственно 1-й и 2-й интегральными

ми теоремами о среднем. Очевидно, что 1-я теорема получается, как частный случай, из 2-й теоремы, если $\varphi(x)=1, \forall x \in [a, b]$.

11. Интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Возьмем произвольное $t \in [a, b]$ и рассмотрим интеграл $\int_a^t f(x)dx$. При переменном t он является функцией аргумента t , которую мы обозначим $\Phi(t)$, т. е. положим

$$\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Теорема 7.8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $\Phi(t)$ непрерывна при любом $t \in [a, b]$.

■ Возьмем произвольное $t \in [a, b]$ и $t + \Delta t \in [a, b]$. Тогда

$$\Delta\Phi(t) = \Phi(t + \Delta t) - \Phi(t) = \int_a^{t+\Delta t} f(x)dx - \int_a^t f(x)dx,$$

или, в силу аддитивности интеграла,

$$\Delta\Phi(t) = \int_t^{t+\Delta t} f(x)dx.$$

На основании теоремы 7.6, имеем отсюда

$$\Delta\Phi = \mu\Delta t. \quad (7.26)$$

Здесь $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$, где $\mu_1 = \inf_{[t, t+\Delta t]} f(x)$, $\mu_2 = \sup_{[t, t+\Delta t]} f(x)$. Поэтому

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta\Phi = 0,$$

что и доказывает теорему. □

Теорема 7.9. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = t$, то функция $\Phi(t)$ дифференцируема в этой точке, и

$$\Phi'(t) = f(t). \quad (7.27)$$

■ Действительно, из (7.26) имеем

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \mu.$$

Если $\Delta t \rightarrow 0$, то $\mu_1 \rightarrow f(t)$ и $\mu_2 \rightarrow f(t)$ (в силу непрерывности функции $f(x)$ в точке t), а значит и $\mu \rightarrow f(t)$, так что

$$\Phi'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = f(t). \quad \square$$

Теорему 7.9 называют теоремой Барроу. Переписав (7.27) так

$$\left[\int_a^t f(x) dx \right]' = f(t), \quad (7.28)$$

мы видим, что теореме Барроу можно придать следующую формулировку:

Теорема 7.9'. Если подынтегральная функция непрерывна на некотором отрезке, то производная ее определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на этом пределе.

Выясним геометрический смысл теоремы Барроу. Очевидно, что $\Phi(t)$ – это площадь заштрихованной фигуры (рис. 7.17), а значит $\Delta\Phi = S_{ABCD}$. Но тогда при $\Delta t \rightarrow 0$ фигуру ABCD можно в пределе считать прямоугольником, а значит

$$\Phi'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S_{ABCD}}{AB} = f(t).$$

Теорему Барроу можно истолковать и физически. Будем считать, что x – это время, а $f(x)$ – скорость, зависящая от времени. Тогда интеграл $\int_a^t f(x) dx$ есть путь, пройденный точкой за время $[a, t]$, и, если t переменна, то и путь зависит от времени. Но тогда его производная по t равна скорости в данный момент t , откуда и следует (7.28).

Примечание 1. В формуле (7.28) обозначим x через t , а t – через x . Тогда она примет вид

$$\left[\int_a^x f(t) dt \right]' = f(x). \quad (7.29)$$

Отсюда следует очень важная

Теорема 7.10. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке первообразную (а значит она имеет на нем и бесчисленное множе-

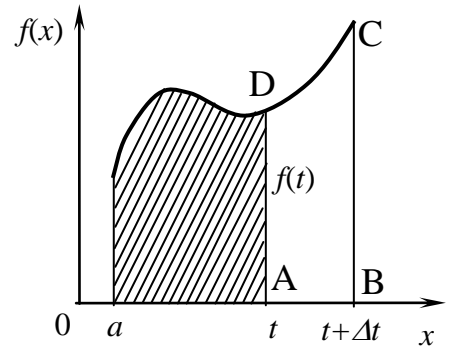


Рис. 7.17

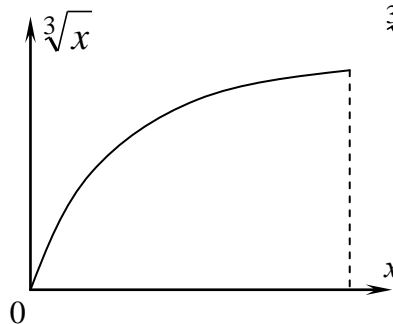


Рис. 7.18

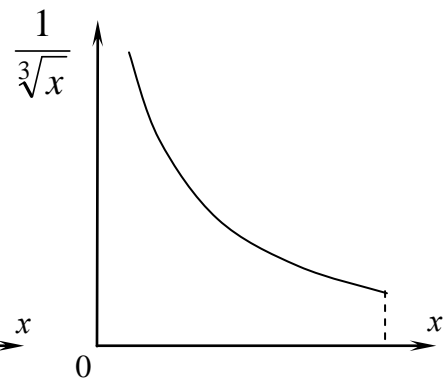


Рис. 7.19

ство первообразных).

■ Действительно, если $x \in [a, b]$, то одной из первообразных функции $f(x)$, в силу (7.29), является функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. □

Примечание 2. Мы видели ранее, что производная ограниченной на данном отрезке функции может быть неограниченной функцией; примером может служить функция $y = \sqrt[3]{x}$, для которой $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ (рис. 7.18, 7.19).

Аналогично, производная непрерывной функции может быть разрывной функцией (см. рис. 7.20) и т. д. Таким образом, производная функции обладает, вообще говоря, «худшими» свойствами, чем сама функция, т. е.

действие дифференцирования «ухудшает» свойства функции. Из доказанных же теорем 7.8 и 7.9 следует, что действие интегрирования, наоборот, «улучшает» свойства функции: интегрируемую (но не обязательно непрерывную) функцию оно превращает в непрерывную функцию (теорема 7.8), а непрерывную, но не обязательно дифференцируемую, функцию — в функцию дифференцируемую (теорема 7.9). Иными словами, операция интегрирования «сглаживает» функцию. Этот результат воспринимается естественно, поскольку интегрирование есть действие, обратное дифференцированию, а значит оно должно обладать свойствами противоположного характера.

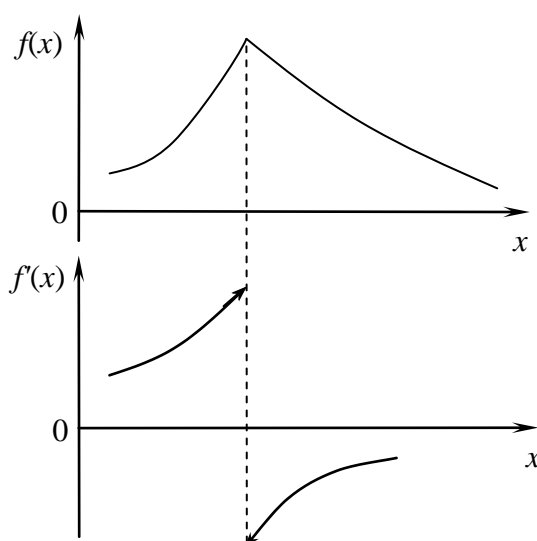


Рис. 7.20

12. Формула Ньютона–Лейбница.

Связь определенного интеграла с неопределенным

Пусть $f(t)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, а $F(t)$ — одна из ее первообразных. Из равенства (7.28) следует, что и функция

$\Phi(t) = \int_a^t f(x)dx$ является первообразной функции $f(t)$. Но тогда $F(t)$ и $\Phi(t)$ различаются на некоторую константу, т. е.

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) + C, \quad (7.30)$$

где C – неизвестное число, зависящее от выбора функции $F(t)$ и числа a . Для его нахождения положим $t = a$. Тогда получим из (7.30)

$$0 = F(a) + C,$$

откуда

$$C = -F(a),$$

а значит

$$\int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a).$$

Теперь уже можно зафиксировать величину t . Положив $t = b$, будем иметь

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (7.31)$$

или короче

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Формулу (7.31) называют формулой Ньютона – Лейбница. Она является важнейшей формулой интегрального исчисления. Эта формула позволяет вычислять определенный интеграл, не пользуясь его определением как предела интегральной суммы. Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона – Лейбница сводится к нахождению первообразной для подынтегральной функции. Именно поэтому вычисление определенного интеграла и нахождение первообразной называют одним и тем же термином: интегрирование.

Пример 7.3. Вычислим уже встречавшийся нам интеграл $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Формула (7.31) дает сразу

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = \cos x\Big|_{\pi}^0 = 1 - (-1) = 2,$$

что, естественно, совпадает с результатом, полученным в примере 7.1.

Установим связь между неопределенным и определенным интегралами.

С одной стороны,

$$\int f(x)dx = F(x) + C = [F(x) - F(a)] + C,$$

т. е.

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C, \quad (7.32)$$

(здесь a – произвольное, но фиксированное число).

С другой стороны,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = [F(x) + C]\Big|_a^b,$$

т. е.

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx\Big|_a^b. \quad (7.33)$$

Формулы (7.32) и (7.33) выражают неопределенный интеграл через определенный и наоборот.

13. О связи между дифференциальными и интегральными теоремами о среднем ^{*)}

Установим связь между теоремой Лагранжа и теоремой 7.6'. В силу последней,

$$\int_a^b f'(t)dt = f'(\xi)(b-a), \quad (7.34)$$

где $\xi \in (a, b)$. Но, на основании формулы Ньютона – Лейбница,

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$$

Итак,

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a),$$

что совпадает с теоремой Лагранжа. Поэтому теореме Лагранжа можно было бы рассматривать как следствие теоремы 7.6'. Однако, следует иметь в виду, что, написав равенство (7.34), мы предположили, что функция $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, в то время как в теореме Лагранжа требуется лишь, чтобы функция $f'(x)$ существовала на отрезке $[a, b]$, но не обязательно была непрерывна на нем.

Совершенно аналогична связь между теоремой Коши и теоремой 7.7'. Действительно, возьмем функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, такие, что $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ существуют на отрезке $[a, b]$, причем $\varphi'(x)$ не меняет знака на отрезке $[a, b]$ и не обращается на нем в нуль. Рассмотрим выражение $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, и пусть $q(x)$

– первообразная этой дроби, т. е. пусть

^{*)} Здесь под 1-й и 2-й интегральными теоремами о среднем подразумеваются теоремы 7.6' и 7.7', в которых функция $f(x)$ считается непрерывной.

$$q'(x) = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Тогда $f'(x) = q'(x)\varphi'(x)$, а значит

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b q'(x)\varphi'(x)dx,$$

или, на основании теоремы 7.7',

$$\int_a^b f'(x)dx = q'(\xi) \int_a^b \varphi'(x)dx, \quad (7.35)$$

т. е.

$$f(b) - f(a) = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} [\varphi(b) - \varphi(a)],$$

откуда и вытекает теорема Коши.

Однако и здесь следует помнить, что, написав равенство (7.35), мы молча предполагали непрерывность функции $q'(x) = \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ на отрезке $[a, b]$, что фактически для теоремы Коши не обязательно.

Таким образом, можно говорить, что 1-я и 2-я интегральные теоремы о среднем (в вариантах 7.6' и 7.7') являются интегральными аналогами теорем Лагранжа и Коши соответственно.

14. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$, а также их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. На основании формулы (7.33),

$$\int_a^b u dv = \int_a^b u dv \Big|_a^b.$$

Но, как мы знаем,

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

а значит

$$\int_a^b u dv = \left(uv - \int v du \right) \Big|_a^b = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du \Big|_a^b.$$

Окончательно

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (7.36)$$

Существование каждого из интегралов обеспечивается непрерывно-

стью подынтегральной функции.

Пример 7.4. На основании формулы (7.36), имеем

$$\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \frac{dx}{x} = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e dx = e \ln e - (e - 1) = 1$$

15. Новые формы остаточного члена формулы Тейлора

Пусть функция $f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в некотором промежутке E , содержащем точку x_0 . Тогда, как мы видели, в этом промежутке справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n(x), \quad (7.37)$$

причем, как было доказано,

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = r_n''(x_0) = \dots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Формула Ньютона-Лейбница дает

$$\int_{x_0}^x r_n'(t) dt = r_n(x) - r_n(x_0),$$

а так как $r_n(x_0) = 0$, то

$$r_n(x) = \int_{x_0}^x r_n'(t) dt.$$

Перепишем это так

$$r_n(x) = - \int_{x_0}^x r_n'(t) d(x - t).$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$r_n(x) = -r_n'(t)(x - t) \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x r_n''(t)(x - t) dt,$$

а так как $r_n'(x_0) = 0$, то

$$r_n(x) = \int_{x_0}^x r_n''(t)(x - t) dt,$$

или

$$r_n(x) = - \int_{x_0}^x r_n''(t) d \frac{(x-t)^2}{2!} .$$

Снова интегрируя по частям, имеем

$$r_n(x) = -r_n''(t) \frac{(x-t)^2}{2!} \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x r_n'''(t) \frac{(x-t)^2}{2!} dt,$$

откуда

$$r_n(x) = \int_{x_0}^x r_n'''(t) \frac{(x-t)^2}{2!} dt,$$

или

$$r_n(x) = - \int_{x_0}^x r_n'''(t) d \frac{(x-t)^3}{3!} .$$

Аналогично можем получить, что

$$r_n(x) = -r_n'''(t) \frac{(x-t)^3}{3!} \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x r_n^{IV}(t) \frac{(x-t)^3}{3!} dt,$$

т. е.

$$r_n(x) = \int_{x_0}^x r_n^{IV}(t) \frac{(x-t)^3}{3!} dt.$$

Продолжая этот процесс, получим в конце концов

$$r_n(x) = \int_{x_0}^x r_n^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt,$$

а так как, на основании (7.37), $r_n^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$, то окончательно

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt . \quad (7.38)$$

Правую часть (7.38) называют интегральной формой Коши остаточного члена формулы Тейлора.

Предположим дополнительно, что функция $f^{(n+1)}(t)$ непрерывна в промежутке E . Тогда, учитывая, что функция $\varphi(t) = (x-t)^n$ не меняет знака на отрезке $[x_0, x]$, получим, на основании теоремы 7.7,

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n dt,$$

т. е.

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_{x_0}^x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1},$$

или окончательно

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}.$$

Правая часть есть так называемая форма Лагранжа остаточного члена формулы Тейлора. Она позволяет переписать формулу Тейлора (7.37) так

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

Напомним, что здесь $\xi \in (x_0, x)$.

16. Замена переменной в определенном интеграле

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная на отрезке

$[a, b]$ функция. Положим $x = \varphi(t)$, и пусть α и β – такие числа, что $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Предположим, кроме того, что:

а) функции $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$:

б) если $\alpha \leq t \leq \beta$, то $a \leq \varphi(t) \leq b$.

Докажем, что в этом случае справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \quad (7.39)$$

При сделанных предположениях сложная функция $f[\varphi(t)]$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Поэтому оба интеграла из формулы (7.39) существуют, в силу непрерывности подынтегральных функций.

Пусть $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \Big|_{\alpha}^{\beta} = \{F[\varphi(t)] + C\} \Big|_{\alpha}^{\beta} =$$

$$= F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Формула (7.39) позволяет после выполнения интегрирования по переменной t не возвращаться к старой переменной x , а подставлять в полученную первообразную вместо новой переменной новые пределы интегрирования.

Пример 7.5. Вычислим интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

Положив $x = \operatorname{tg} t$, замечаем, что значениям $x = 0$ и $x = 1$ отвечают значения $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{4}$. Поэтому, на основании (7.39),

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^{-6} t \cos^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t)^2 dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + 2 \cos 2t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4t \right) dt = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} t + \sin 2t + \frac{1}{8} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + 1 + 0 \right) = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

17. Интегралы от четных и нечетных функций в симметричных пределах

Возьмем интеграл $\int_{-a}^a f(x) dx$, где a – любое число. Имеем

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

В первом интеграле справа положим $x = -t$. Тогда, на основании формулы (7.39),

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt =$$

$$= \int_0^a f(-x) dx$$

(на основании независимости определенного интеграла от обозначения переменной интегрирования). Итак,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx,$$

т. е.

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx. \quad (7.40)$$

Пусть $f(x)$ – четная функция. Тогда $f(-x) = f(x)$, а значит

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Этот результат имеет простой геометрический смысл (рис. 7.21).

Пусть теперь $f(x)$ – нечетная функция. Тогда $f(-x) = -f(x)$, т. е. $f(x) + f(-x) = 0$, и формула (7.40) дает

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Геометрически это означает, что площадь криволинейной трапеции с отрицательными функциями можно условно считать отрицательной, рис. 7.22.

18. Вычисление площадей фигур при помощи интегралов

1°. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Из геометрического смысла определенного интеграла и из результата, полученного в конце предыдущего параграфа, следу-

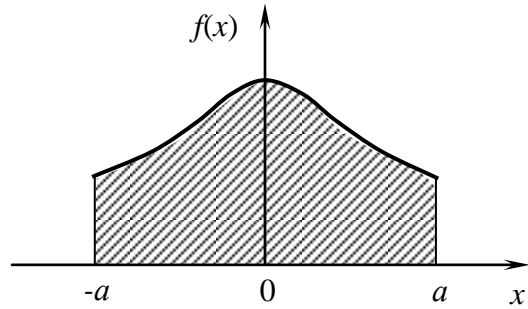


Рис. 7.21

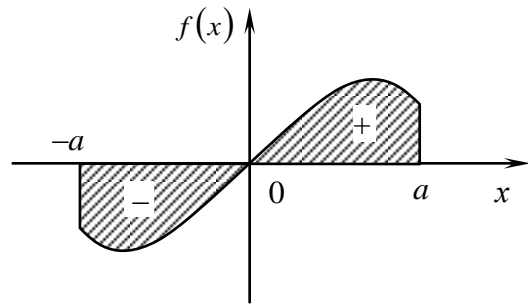


Рис. 7.22

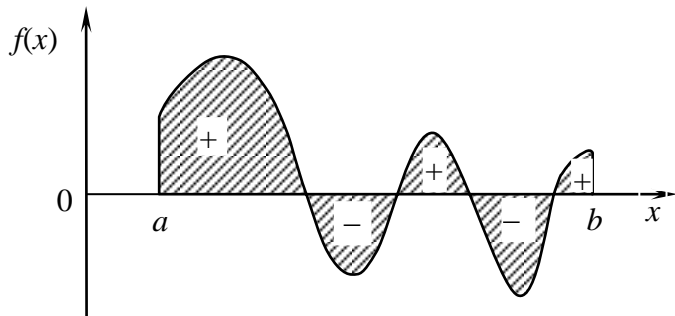


Рис. 7.23

ет, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, заключенных между линией $y = f(x)$ и осью Ox на отрезке $[a, b]$, рис. 7.23. Сумма же “модулей” этих площадей равна, очевидно,

$$\int_a^b |f(x)|dx.$$

Если для всех $x \in [a, b]$ будет $f(x) \geq \varphi(x)$, то площадь фигуры, изображенной на рис. 7.24, очевидно, равна

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx.$$

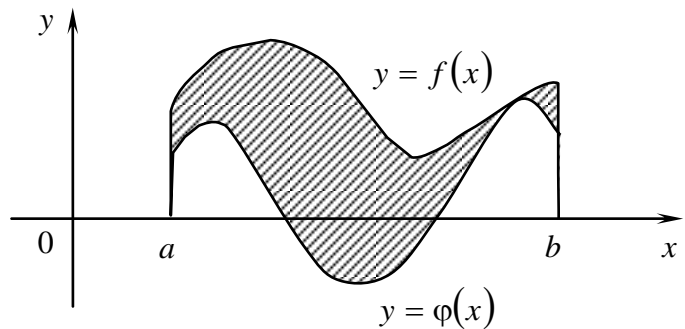


Рис.7.24

Пример 7.6. Площадь фигуры, заключенной между параболлами $y = x^2$ и $y^2 = x$, рис. 7.25, равна

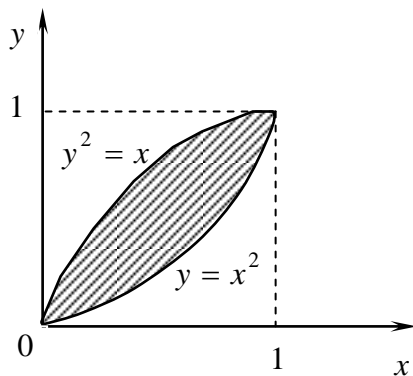


Рис. 7.25

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

2°. Пусть теперь дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана не декартовым уравнением, а параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (7.41)$$

причем точкам A и B отвечают значения параметра $t = \alpha$ и $t = \beta$. Обозначим $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Будем считать, что функция $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, и

$$(\alpha \leq t \leq \beta) \Rightarrow (a \leq \varphi(t) \leq b, \varphi(t) \geq 0).$$

Кроме того, мы естественно, считаем, что любая прямая $x = c$ ($a \leq c \leq b$) пересекает дугу $\overset{\cup}{AB}$ только один раз, т. е. что определяемая уравнениями (7.41) функция $y = f(x)$ однозначна на отрезке $[a, b]$. Тогда площадь заштрихованной фигуры (рис. 7.26), очевидно, равна

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Совершим в этом интеграле замену переменной по формуле $x = \varphi(t)$. Тогда, очевидно, $f[\varphi(t)] = \psi(t)$, и, на основании формулы (7.30), получим

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt.$$

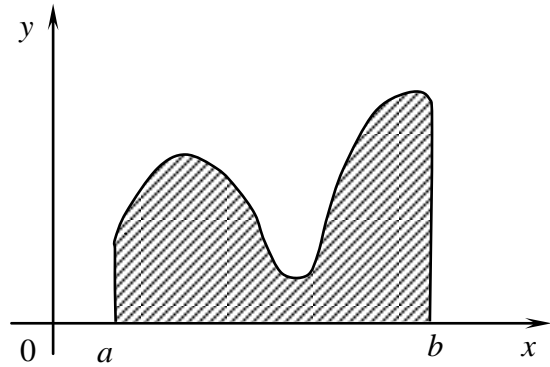


Рис. 7.26

Пример 7.7. Вычислим площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями a и b , рис. 7.27.

Параметрические уравнения дуги AB :

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases}$$

причем $0 \leq t \leq \pi$. Поэтому учитывая симметрию эллипса, находим

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{\pi}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = -2ab \int_{\pi}^0 \sin^2 t dt = \\ &= ab \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt = ab \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi} = \pi ab. \end{aligned}$$

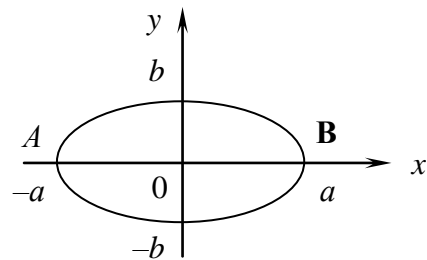


Рис. 7.27

Этот результат легко было предусмотреть, учитывая, что площадь круга радиуса a равна

πa^2 , а эллипс есть равномерно деформированный круг с коэффициентом деформации $\frac{b}{a}$, так что должно быть

$$S = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi ab.$$

3°. Пусть дуга AB задана полярным уравнением $r = g(\varphi)$, где $g(\varphi)$ — однозначная, непрерывная и неотрицательная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция. Вычислим площадь сектора AOB , рис. 7.28.

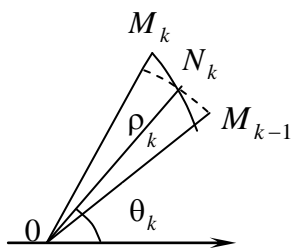


Рис. 7.29

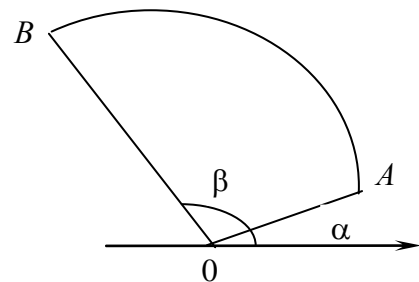


Рис. 7.28

Разобьем сектор на n частей лучами $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, ..., $\varphi = \varphi_{n-1}$ и, как всегда, положим $\varphi_0 = \alpha$,

$\varphi_n = \beta$. Кроме того, обозначим $\varphi_k - \varphi_{k-1} = \Delta\varphi_k$, $k = 1, 2, \dots, n$

Внутри каждого сектора $OM_{k-1}M_k$, рис. 7.29 проведем произвольный луч $\varphi = \theta_k$ и обозначим $ON_k = \rho_k$. Площадь кругового сектора с радиусом ρ_k и центральным углом $\Delta\varphi_k$ равна

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} \rho_k^2 \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} [g(\theta_k)]^2 \Delta\varphi_k.$$

Составим сумму (рис. 7.30)

$$\tilde{S} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [g(\theta_k)]^2 \Delta\varphi_k.$$

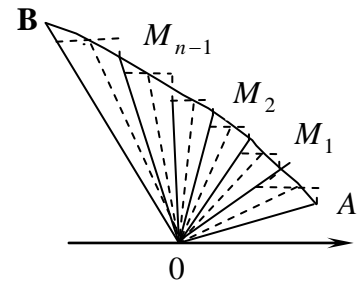


Рис. 7.30

Она равна площади ступенчатой фигуры, составленной из круговых секторов.

Легко видеть, что \tilde{S} есть интегральная сумма для функции $\frac{1}{2} [g(\varphi)]^2$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, а т. к. эта функция непрерывна на нем, то, полагая $\lambda = \max\{\Delta\varphi_k\}$, получим для искомой площади

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{S}_\lambda = \frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [g(\theta_k)]^2 \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\varphi)]^2 d\varphi.$$

Этот результат обычно записывают так

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi, \quad (7.42)$$

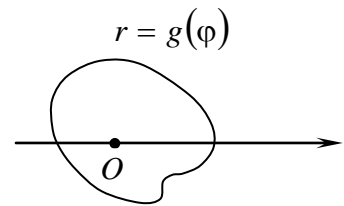


Рис. 7.31

подразумевая под r функцию $g(\varphi)$.

Легко убедиться, что формула (7.42) верна и для случая, когда линия $r = g(\varphi)$ — замкнутая, и полюс находится внутри нее, рис. 7.31. В этом случае, очевидно, надо положить, например, $\alpha = 0$, $\beta = 2\pi$.

Пример 7.8. Вычислим площадь фигуры, ограниченной кардиоидой, рис. 7.32,

$$r = a(1 + \cos\varphi).$$

Имеем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{2} \left(\frac{3}{2} \varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{3}{2} 2\pi = \frac{3}{2} \pi a^2. \end{aligned}$$

Рис. 7.32

19. Вычисление длин дуг при помощи интегралов

Пусть в плоскости xOy задана дуга $\overset{\cup}{AB}$, рис. 7.33. Разобьем эту дугу на n частей точками M_1, M_2, \dots, M_{n-1} и впишем в нее ломаную $AM_1M_2\dots M_{n-1}B$. Пусть \tilde{s} — длина ломаной.

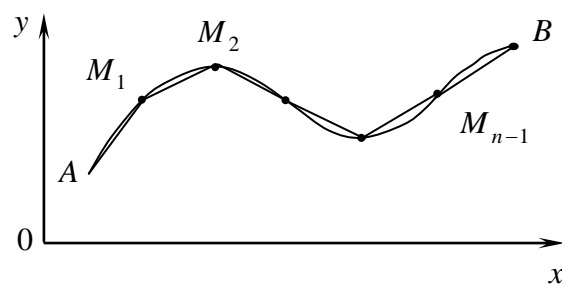


Рис.7.33

Обозначим $\Delta s_k = M_{k-1}M_k$ ($k=1,2,\dots,n$), и пусть $\delta = \max\{\Delta s_k\}$. Предположим теперь, что $\delta \rightarrow 0$, т. е. что длина каждого звена ломаной стремится к нулю. Если существует предел $s = \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{s}_\delta$,

зависящий от способа разбиения дуги $\overset{\cup}{AB}$ точками M_1, M_2, \dots, M_{n-1} , то он называется длиной дуги $\overset{\cup}{AB}$, а сама дуга в этом случае называется спрямляемой.

1°. Пусть дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана декартовым уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$. Будем считать, что функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$. Обозначим x_k, y_k координаты точки M_k ($k=1,2,\dots,n$), а $x_k - x_{k-1} = \Delta x_k$, $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$, рис. 7.34. Пусть, далее, $\lambda = \max\{\Delta x_k\}$. Тогда, очевидно, $(\lambda \rightarrow 0) \Leftrightarrow (\delta \rightarrow 0)$. Имеем

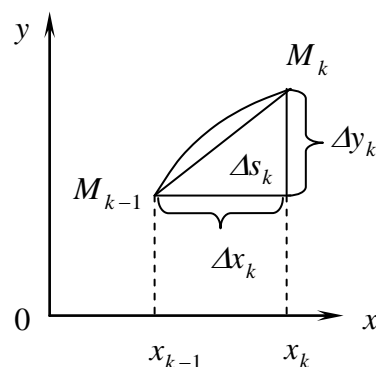


Рис.7.34

$$\tilde{s} = \sum_{k=1}^n \Delta s_k.$$

Но

$$\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} \Delta x_k.$$

На основании теоремы Лагранжа,

$$\Delta y_k = f'(\xi_k) \Delta x_k,$$

т. е.

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} = f'(\xi_k),$$

где $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Следовательно, $\Delta s_k = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k$, а значит

$$\tilde{s} = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k. \quad (7.43)$$

Справа стоит интегральная сумма для функции $\Phi(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ на отрезке $[a, b]$, при этом значения ξ_k в этой сумме – это вполне определенные точки из теоремы Лагранжа. Но, в силу условия, функция $\Phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а значит точки ξ_k в интегральной сумме можно выбирать произвольно; в частности, в качестве ξ_k можно взять именно “лагранжевы” точки. Поэтому при $\lambda \rightarrow 0$ получим из равенства (7.43)

$$s = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Phi(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b \Phi(x) dx,$$

т. е.

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

или короче

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (7.44)$$

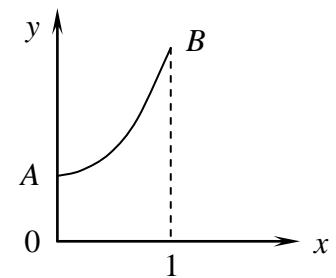


Рис. 7.35

Пример 7.9. Длина дуги AB цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ ($0 \leq x \leq 1$), рис. 7.35, на основании (7.44), равна

$$\begin{aligned} s &= \int_0^1 \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = \int_0^1 \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x \Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 = \\ &= \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

Примечание. Пусть $s(x)$ – длина дуги линии $y = f(x)$ от фиксированной точки M_0 до “текущей” точки M , рис. 7.36. Тогда в силу (7.44),

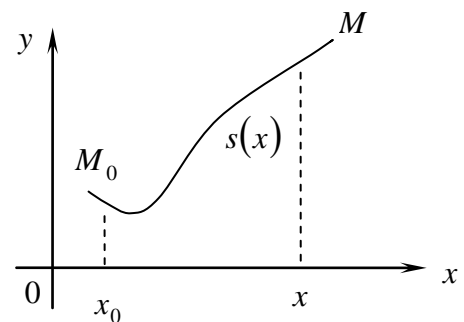


Рис. 7.36

$$s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

где $y = f(x)$. Отсюда, на основании теоремы Барроу,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2},$$

что совпадает с формулой (5.15), принятой ранее без доказательства.

2°. Пусть дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (7.45)$$

причем движению точки M от A к B отвечает монотонное изменение параметра t от α до β . Совершим в формуле (7.44) замену переменной, положив $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция из параметрических уравнений (7.45). Тогда

$$y = f[\varphi(t)] = \psi(t), \quad y' = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

а изменение x от a до b отвечает изменению t от α до β . Следовательно, на основании (7.39), формула (7.44) примет вид

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right]^2} \varphi'(t) dt,$$

т. е.

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

или короче

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt. \quad (7.46)$$

Пример 7.10. Найдем длину первой арки циклоиды, рис. 7.37,

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Имеем, на основании (7.46),

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1 - \cos t)]^2 + (a \sin t)^2} dt = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = \end{aligned}$$

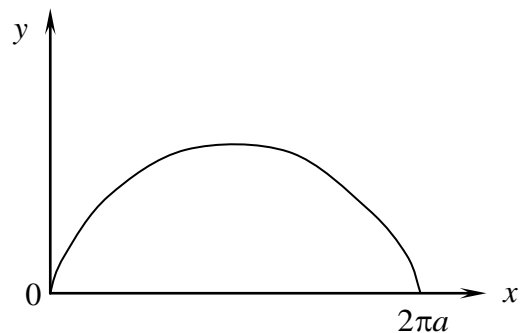


Рис. 7.37

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 4a[1 - (-1)] = 8a.$$

Примечание 1. Легко убедиться, что формула (7.46) верна и в слу-

чае, когда вместо некоторой дуги AB имеется замкнутая линия.

Кроме того, нетрудно видеть, что если кривая – пространственная, и ее параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

где $\alpha \leq t \leq \beta$, то, на основании формулы $\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, для длины дуги AB получим

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt,$$

где функции $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, и $\chi'(t)$ предполагаются непрерывными.

Примечание 2. Пусть MM' – элементарная дуга, отвечающая отрезку $[t, t + \Delta t]$ изменения параметра t . Обозначим $MM' = \Delta \tilde{s}$, $MM' = \Delta s$. Имеем, в силу (7.46),

$$\Delta \tilde{s} = \int_t^{t+\Delta t} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt,$$

или на основании теоремы о среднем,

$$\Delta \tilde{s} = \sqrt{[\varphi'(\theta)]^2 + [\psi'(\theta)]^2} \Delta t,$$

где $\theta \in (t, t + \Delta t)$.

Далее,

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau^*)]^2} \Delta t,$$

где $\tau \in (t, t + \Delta t)$, $\tau^* \in (t, t + \Delta t)$. Следовательно,

$$\frac{\Delta \tilde{s}}{\Delta s} = \frac{\sqrt{[\varphi'(\theta)]^2 + [\psi'(\theta)]^2}}{\sqrt{[\varphi'(\tau)]^2 + [\psi'(\tau^*)]^2}}.$$

Если $\Delta t \rightarrow 0$, то $\theta \rightarrow t$, $\tau \rightarrow t$ и $\tau^* \rightarrow t$, а значит

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \tilde{s}}{\Delta s} = 1.$$

Тем самым мы доказали, что длина бесконечно малой дуги спрямляемой линии эквивалентна длине стягивающей ее хорды. Это значит, что если

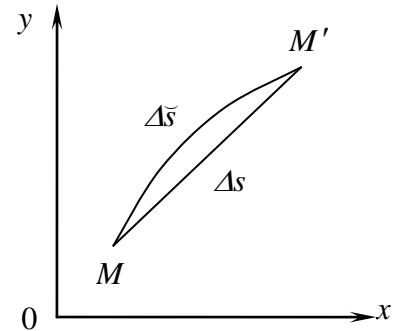


Рис. 7.38

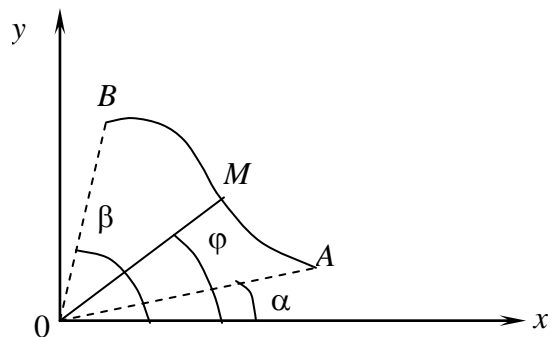


Рис. 7.39

$\Delta t \rightarrow 0$, то $\Delta \bar{s} = \Delta s + O(\Delta s)$, рис. 7.38.

3°. Пусть дуга $\overset{\cup}{AB}$ задана полярным уравнением $r = g(\varphi)$. Поскольку $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то для любой точки $M \in \overset{\cup}{AB}$ будет

$$\begin{cases} x = g(\varphi) \cos \varphi, \\ y = g(\varphi) \sin \varphi, \end{cases}$$

т. е. мы снова пришли к параметрическому заданию, а поэтому формула (7.46) дает

$$\begin{aligned} s &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'_{\varphi}{}^2 + y'_{\varphi}{}^2} d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[g'(\varphi) \cos \varphi - g(\varphi) \sin \varphi]^2 + [g'(\varphi) \sin \varphi + g(\varphi) \cos \varphi]^2} d\varphi = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[g'(\varphi)]^2 + [g(\varphi)]^2} d\varphi, \end{aligned}$$

или короче,

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'_{\varphi}{}^2 + r^2} d\varphi.$$

Пример 7.11. Найдем длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ (см. рис. 7.32). Учитывая симметричность кривой относительно полярной оси, получим

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(-a \sin \varphi)^2 + [a(1 + \cos \varphi)]^2} d\varphi = 2a \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \varphi + 1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= 2a \int_0^{\pi} \sqrt{2 + 2 \cos \varphi} d\varphi = 4a \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a. \end{aligned}$$

20. Вычисление объема при помощи интегралов

Пусть требуется вычислить объем произвольного тела, отнесенного к некоторой оси Ox , рис. 7.40. Будем считать, что площадь $s(x)$ сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной к оси Ox , есть известная функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками x_1, x_2, \dots, x_{n-1} . Проведем через эти точки секущие плоскости. Они разобьют тело на n слоев.

На каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ возьмем произвольную точку ξ_k и вычислим $S(\xi_k)$. Произведение $S(\xi_k)\Delta x_k$ есть объем цилиндра с основанием $S(\xi_k)$ и высотой Δx_k . Составим сумму

$$\tilde{V} = \sum_{k=1}^n S(\xi_k)\Delta x_k.$$

Она равна объему “ступенчатого” тела, составленного из n цилиндрических тел. Обозначим теперь $\lambda = \max_k \{\Delta x_k\}$ и пусть

$\lambda \rightarrow 0$. Тогда для искомого объема полу-

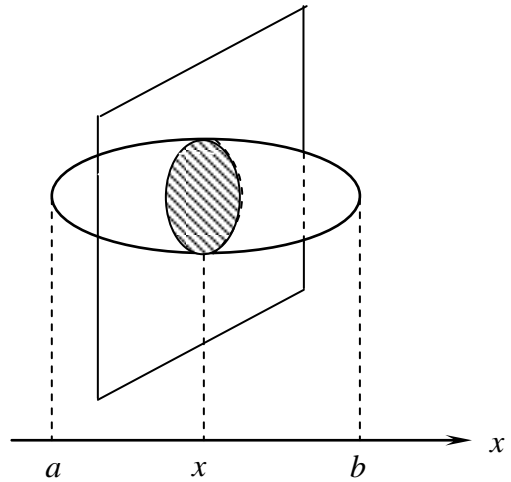


Рис. 7.40

чим

$$V = \int_b^a S(x)dx. \quad (7.47)$$

Пример 7.12. Вычислим объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{и} \quad \text{плоскостью}$$

$$z = H, \quad \text{рис.7.42.}$$

Формула (7.47) дает

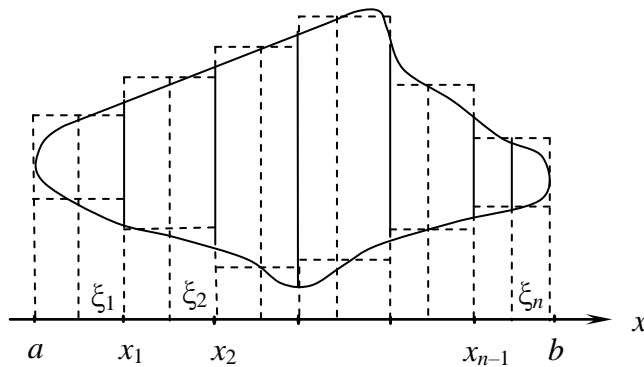


Рис. 7.41

$$V = \int_0^H S(z)dz.$$

Для нахождения $S(z)$ перепишем уравнение параболоида так

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{z})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{z})^2} = 1.$$

Используя результат примера 7.7, получим

$$S(z) = \pi a\sqrt{z}b\sqrt{z} = \pi abz,$$

а значит

$$V = \pi ab \int_0^H z dz = \pi ab \left. \frac{z^2}{2} \right|_0^H = \frac{1}{2} \pi ab H^2.$$

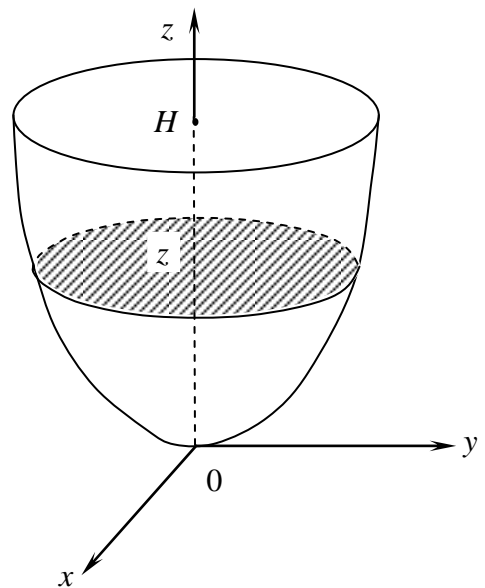


Рис. 7.42

Предположим теперь, что рассматриваемое тело образуется путем вращения вокруг оси Ox некоторой линии $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$), рис. 7.43. Тогда при любом x

$$S(x) = \pi y^2,$$

а значит, в силу (7.47),

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx,$$

где под y подразумевается функция $f(x)$.

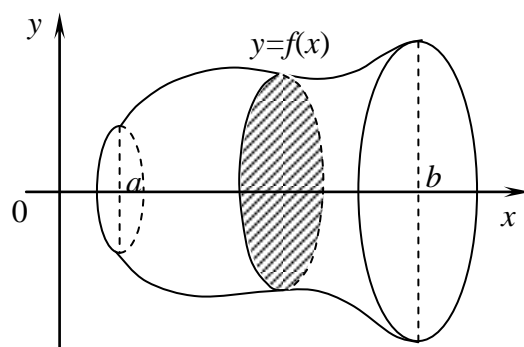


Рис. 7.43

Пример 7.13. Вычислим объем веретенообразного тела, образованного вращением вокруг оси Ox одной арки синусоиды $y = \sin x$, рис. 7.44.

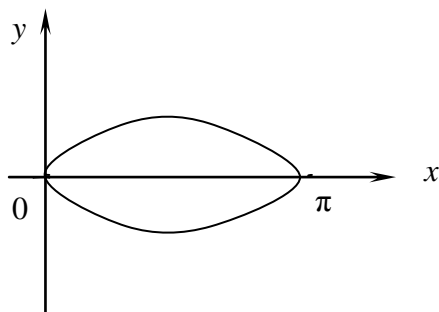


Рис. 7.44

Получим

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

21. Вычисление площадей поверхностей вращения

Пусть дуга $\overset{\cup}{AB}$ линии $y = f(x)$, отвечающая отрезку $[a, b]$, вращается вокруг оси Ox (предполагается, что $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$). Разобьем дугу $\overset{\cup}{AB}$ на n частей точками M_1, M_2, \dots, M_{n-1} , и пусть x_k, y_k — координаты точки M_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Впи-

шем в дугу $\overset{\cup}{AB}$ ломаную $AM_1M_2 \dots M_{n-1}B$, рис. 7.45.

Ее звено $M_{n-1}M_n$ при вращении вокруг оси Ox описывает поверхность конуса (вообще говоря, усеченного). Ее площадь, следовательно, равна

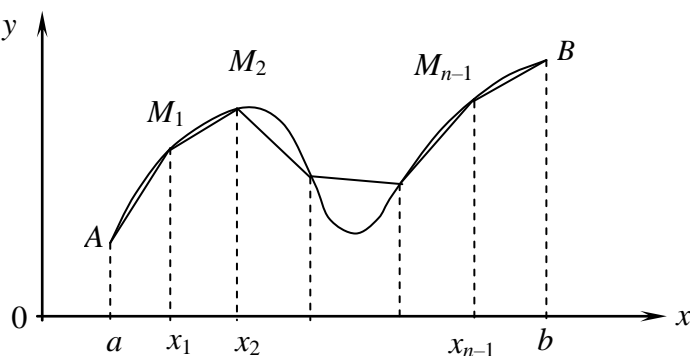


Рис. 7.45

$$\Delta S_k = \pi(y_{k-1} + y_k) \Delta s_k.$$

Составим сумму

$$\tilde{S} = \pi \sum_{k=1}^n (y_{k-1} + y_k) \Delta s_k.$$

Пусть $\delta = \max_k \{\Delta s_k\}$. Предположим теперь, что $\delta \rightarrow 0$, т. е. что длина каждого звена ломаной стремится к нулю. Если существует предел $S = \lim_{\delta \rightarrow 0} \tilde{S}_\delta$, то он называется площадью поверхности, образованной вра-

щением дуги $\overset{\cup}{AB}$ вокруг оси Ox .

Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Докажем, что в этом случае упомянутый предел существует и найдем его значение. Для этого перепишем выражение для \tilde{S} так

$$\tilde{S} = \pi \left[\sum_{k=1}^n y_{k-1} \Delta s_k + \sum_{k=1}^n y_k \Delta s_k \right],$$

т. е.

$$\tilde{S}_\lambda = \pi \left[\sum_{k=1}^n f(\xi_{k-1}) \sqrt{1 + [f'(\xi_k^*)]^2} \Delta x_k + \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \sqrt{1 + [f'(\xi_k^*)]^2} \Delta x_k \right], \quad (7.48)$$

где $\lambda = \max_k \{\Delta x_k\}$.

Справа в (7.48) стоят суммы, в которых ξ_{k-1} и ξ_k — точки разбиения отрезка $[a, b]$, а ξ_k^* — точки из теоремы Лагранжа (см. п. 20). Поэтому обе суммы являются не интегральными для функции $\Phi(x) = f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, а квазиинтегральными. В силу теоремы 7.4 о квазиинтегральной сумме (ее условия, очевидно, выполняются), получим из (7.48) при $\lambda \rightarrow 0$

$$S = \pi \left[\int_a^b \Phi(x) dx + \int_a^b \Phi(x) dx \right],$$

т. е.

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

или короче

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

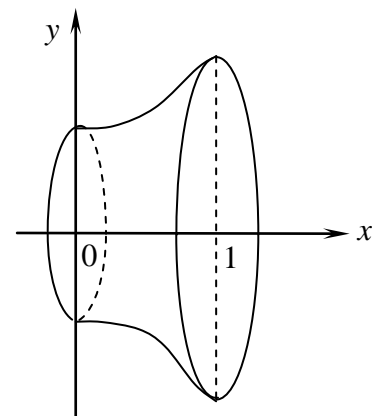


Рис. 7.46

Пример 7.14. Найдем площадь поверхности, образованной вращением дуги линии $y = \operatorname{ch} x$ ($0 \leq x \leq 1$) вокруг оси Ox ,

рис. 7.46.

Имеем

$$\begin{aligned}
 S &= 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch} x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx = 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x dx = \\
 &= \pi \int_0^1 (\operatorname{ch} 2x + 1) dx = \pi \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x + x \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 + 1 \right) = \\
 &= \pi \left(\frac{e^2 - e^{-2}}{4} + 1 \right).
 \end{aligned}$$

22. Нахождение координат центров тяжести. Теоремы Гульдина

Рассмотрим дугу $\overset{\cup}{AB}$ материальной линии $y = f(x)$, отвечающую отрезку $[a, b]$ оси Ox . Будем считать функцию $f'(x)$ непрерывной на отрезке $[a, b]$. Предполагая дугу однородной (ее линейную плотность можно, не ограничивая общности, считать равной 1), найдем центр тяжести C этой дуги.

Для этого разобьем дугу на n частей точками M_1, M_2, \dots, M_{n-1} . Пусть x_k, y_k — координаты точки M_k . Далее, пусть Δs_k — длина дуги

$M_{k-1} \overset{\cup}{M_k}$. Тогда

$$\Delta s_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

или, на основании теоремы 7.6',

$$\Delta s_k = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k,$$

где $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$. Пусть

$n_k = f(\xi_k)$. Очевидно точка

$N_k(\xi_k, n_k)$ принадлежит дуге $M_{k-1} \overset{\cup}{M_k}$.

Каждую из малых дуг $M_{k-1} \overset{\cup}{M_k}$ будем рассматривать как материальную точку с массой Δm_k , численно равной Δs_k , помещенную в точку N_k . Тогда, на основании полученной в аналитической геометрии формулы, имеем

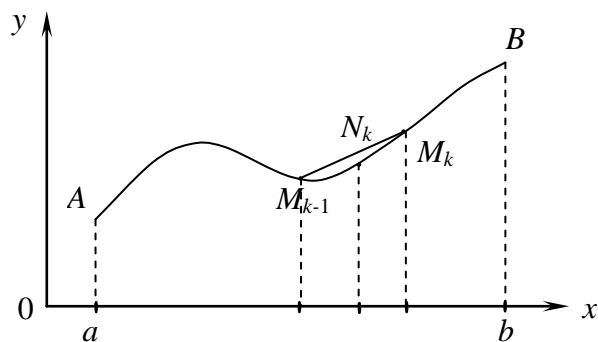


Рис. 7.47

$$\tilde{x}_c = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k \Delta s_k}{\sum_{k=1}^n \Delta s_k} = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k}{\sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k}.$$

Пусть теперь $\lambda \rightarrow 0$. Тогда в пределе получим формулу

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx},$$

т. е.

$$x_c = \frac{\int_a^b x \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx},$$

и аналогично

$$y_c = \frac{\int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx}{\int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx}. \quad (7.49)$$

Перепишем формулу (7.49) так

$$y_c s = \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

где s – длина дуги $\overset{\cup}{AB}$, т. е.

$$2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi y_c s.$$

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 7.11. Площадь поверхности, полученной при вращении дуги вокруг некоторой не пересекающей ее оси, равна длине этой дуги, умноженной на длину окружности, описываемой центром тяжести этой дуги.

Эту теорему называют 1-й теоремой Гульдина.

Возьмем теперь материальную фигуру, ограниченную линиями $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$, где функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и

неотрицательны на отрезке $[a, b]$, причем $f(x) \geq \varphi(x), \forall x \in [a, b]$. Считая

эту фигуру однородной с поверхностной плотностью $\rho = 1$, будем искать ее центр тяжести. Разобьем фигуру на n вертикальных полос. Масса каждой полосы численно равна $\Delta m_k = [f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)] \Delta x_k$. Считая эту полосу материальной точкой с массой Δm_k и с координатами ξ_k и $\frac{1}{2}[f(\xi_k) + \varphi(\xi_k)]$, получим

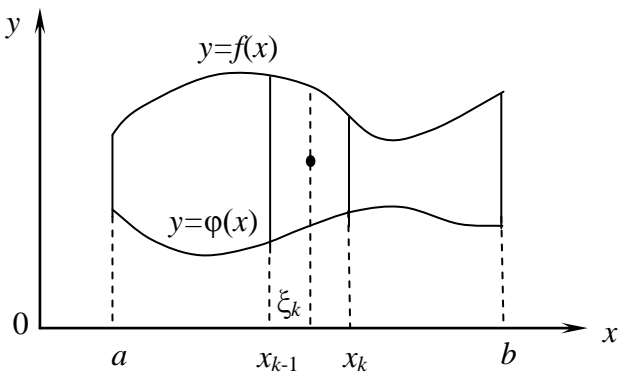


Рис. 7.48

$$\tilde{x}_c = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k \Delta m_k}{\sum_{k=1}^n \Delta m_k} = \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k [f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)] \Delta x_k}{\sum_{k=1}^n [f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)] \Delta x_k},$$

$$\tilde{y}_c = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{2} [f(\xi_k) + \varphi(\xi_k)] \Delta m_k}{\sum_{k=1}^n \Delta m_k} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [f(\xi_k) + \varphi(\xi_k)] [f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)] \Delta x_k}{\sum_{k=1}^n [f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)] \Delta x_k} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{ [f(\xi_k)]^2 - [\varphi(\xi_k)]^2 \} \Delta x_k}{\sum_{k=1}^n [f(\xi_k) - \varphi(\xi_k)] \Delta x_k}.$$

В пределе, при $\lambda \rightarrow 0$, получим точные формулы:

$$x_c = \frac{\int_a^b x [f(x) - \varphi(x)] dx}{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx}, \quad y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b \{ [f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2 \} dx}{\int_a^b [f(x) - \varphi(x)] dx},$$

или

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b x[f(x) - \varphi(x)] dx, \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b \{[f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2\} dx, \quad (7.50)$$

где S – площадь рассматриваемой фигуры.

В частности, если $\varphi(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, то для центра тяжести криволинейной трапеции, рис. 7.49, имеем

$$x_c = \frac{1}{S} \int_a^b x y dx, \quad y_c = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx,$$

где под y подразумевается функция $f(x)$.

Перепишем вторую из формул (7.50) так

$$2\pi y_c S = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2\} dx,$$

или

$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [\varphi(x)]^2 dx = 2\pi y_c S.$$

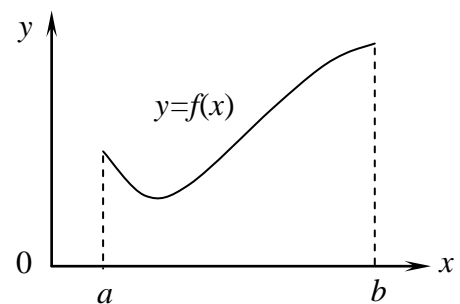


Рис. 7.49

Отсюда вытекает следующая

Теорема 7.12. Объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг на пересекающей ее оси равен площади этой фигуры, умноженной на длину окружности, описываемой ее центром тяжести.

Эту теорему называют 2-й теоремой Гульдина.

Пример 7.15. Объем тела, образованного вращением круга радиуса r вокруг оси, удаленной от его центра на расстояние R , рис. 7.50, равен

$$V = \pi r^2 2\pi R = 2\pi^2 R r^2,$$

а площадь поверхности этого тела, как легко следует из 1-й теоремы Гульдина, равна

$$S = 2\pi r 2\pi R = 4\pi^2 r R.$$

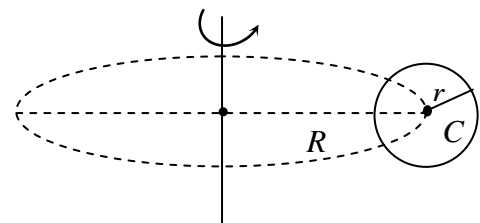


Рис. 7.50

23. Примеры применения интегралов к решению физических задач

Задача 1. Вычислить силу, с которой однородный стержень длины ℓ и массы M притягивает материальную точку массы m , находящуюся на линии продолжения стержня на расстоянии a от ближайшего его конца, рис. 7.51.

Пусть $[x_{k-1}, x_k]$ малый участок стержня (его называют элементарной частью, или просто элементом, стержня). Его масса находится из пропор-

ции

$$\frac{\Delta M_k}{M} = \frac{\Delta x_k}{\ell},$$

откуда

$$\Delta M_k = \frac{M}{\ell} \Delta x_k.$$

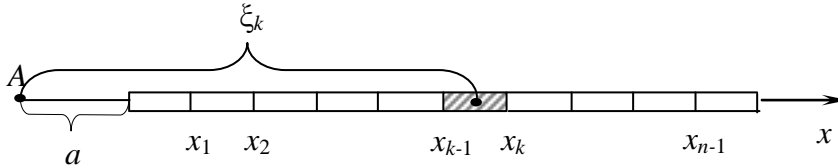


Рис. 7.51

Считая этот участок материальной точкой, получим, что он притягивает точку A с силой

$$\Delta F_k \approx \gamma \frac{m \Delta M_k}{\xi_k^2} = \gamma \frac{mM}{\ell} \frac{\Delta x_k}{\xi_k^2}, \quad *)$$

а так как все силы ΔF_k коллинеарны и сонаправлены, то суммарная сила

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \Delta F_k = \gamma \frac{mM}{\ell} \sum_{k=1}^n \frac{\Delta x_k}{\xi_k^2},$$

откуда в пределе, при $\lambda \rightarrow 0$, получим точную формулу

$$F = \gamma \frac{mM}{\ell} \int_a^{a+\ell} \frac{dx}{x^2} = \gamma \frac{mM}{\ell} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_a^{a+\ell} = \gamma \frac{mM}{\ell} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+\ell} \right) = \gamma \frac{mM}{a(a+\ell)}.$$

Примечание. Оформление решения подобных задач можно сократить следующим образом. В физическом объекте задачи выделяется лишь один элемент, для которого вычисляется подлежащая нахождению величина, а затем сразу, опуская суммирование и последующий предельный переход, находим искомую величину в виде интеграла.

Задача 2. Вычислить потенциальную энергию песка, образующего коническую кучу с радиусом основания R и высотой H , если удельный вес песка равен ρ .

Выделяем элементарный объем и вычисляем его как объем цилиндра. Имеем

$$\frac{r_k}{R} = \frac{H - z_k}{H},$$

откуда

$$r_k = \frac{R}{H} (H - z_k),$$

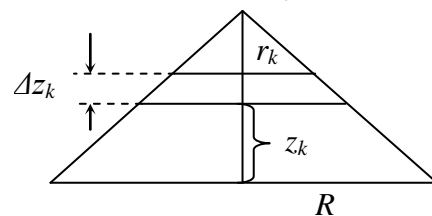


Рис. 7.52

*) Здесь γ – постоянная тяготения.

а значит

$$\Delta V_k = \pi \frac{R^2}{H^2} (H - z_k)^2 \Delta z_k.$$

Потенциальная энергия этого элемента равна

$$\Delta E_k = p \Delta V_k z_k = \pi \frac{R^2}{H^2} p z_k (H - z_k)^2 \Delta z_k,$$

так что

$$\begin{aligned} E &= \int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2} p z (H - z)^2 dz = \frac{\pi R^2 p}{H^2} \int_0^H (H^2 z - 2Hz^2 + z^3) dz = \\ &= \frac{\pi R^2 p}{H^2} \left(\frac{H^2 z^2}{2} - \frac{2Hz^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right) \Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H^4 p}{H^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi R^2 H^2 p}{12}. \end{aligned}$$

Задача 3. Найти момент инерции однородной пластинки плотности ρ , ограниченной линиями $y = 0$, $x = 1$ и $y = \sqrt{x}$, относительно оси Oy .

Напомним, что момент инерции точки массы m относительно другой точки (или относительно оси), находящейся от нее на расстоянии r , равен $I = mr^2$. Поэтому элементом этой пластинки будет полоска ширины Δx_k , параллельная оси Oy . Ее масса равна $\Delta m_k = \rho y_k \Delta x_k = \rho \sqrt{x_k} \Delta x_k$, а значит ее момент инерции относительно оси Oy

$$\Delta I_k = \Delta m_k x_k^2 = \rho \sqrt{x_k} x_k^2 \Delta x_k,$$

так что

$$I = \rho \int_0^1 \sqrt{x} x^2 dx = \rho \int_0^1 x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7} \rho x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{7} \rho.$$

Задача 4. Однородная пластинка в форме полуокруга радиуса R и плотности ρ вращается вокруг диаметра с угловой скоростью ω . Найти ее кинетическую энергию.

Масса элементарного прямоугольника:

$$\Delta m_k = 2\rho y_k \Delta x_k = 2\rho \sqrt{R^2 - x_k^2} \Delta x_k,$$

а значит ее кинетическая энергия

$$\Delta E_k = \frac{\Delta m_k v_k^2}{2} = \frac{\Delta m_k \omega^2 x_k^2}{2} = \rho \omega^2 \sqrt{R^2 - x_k^2} x_k^2 \Delta x_k.$$

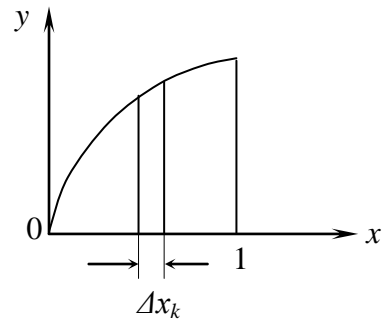


Рис. 7.53

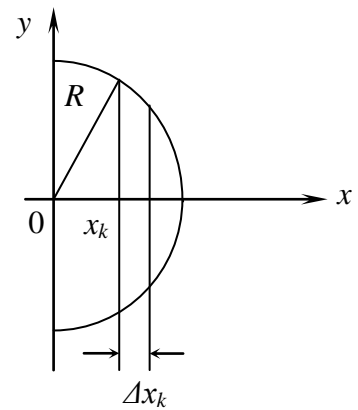


Рис. 7.54

Отсюда для кинетической энергии всей пластинки находим:

$$E = \rho\omega^2 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} x^2 dx.$$

Полагая $x = R \sin t$, получаем

$$\begin{aligned} E &= \rho\omega^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} R^2 \sin^2 t R \cos t dt = \rho\omega^2 R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ &= \frac{1}{4} \rho\omega^2 R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8} \rho\omega^2 R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} \rho\omega^2 R^4 \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{1}{8} \rho\omega^2 R^4 \frac{\pi}{2} = \frac{1}{16} \pi \omega^2 R^4 \rho. \end{aligned}$$

Легко видеть, что данная задача родственна предыдущей, так как кинетическая энергия пластинки отличается от ее момента инерции относительно оси вращения лишь множителем $\frac{\omega^2}{2}$.

Задача 5. Заряд q отталкивается от одноименного заряда q_1 на основании закона Кулона. Первоначальное расстояние между зарядами равно a , а окончательное $a + d$. Найти работу по перемещению заряда.

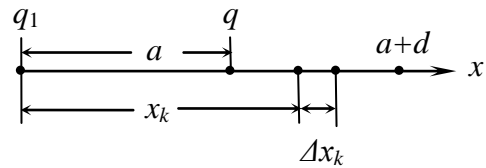


Рис. 7.55

Элементарная работа на участке Δx_k равна

$$\Delta A_k = \varepsilon \frac{q_1 q}{x_k^2} \Delta x_k,$$

а значит

$$\begin{aligned} A &= \varepsilon q_1 q \int_a^{a+d} \frac{dx}{x^2} = \varepsilon q_1 q \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_a^{a+d} = \\ &= \varepsilon q_1 q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+d} \right). \end{aligned}$$

Полагая $q = 1$, $d = +\infty$, получим $A = \varepsilon \frac{q_1}{a}$; это — т. н. потенциал электрического поля заряда q_1 в точке $x = a$.

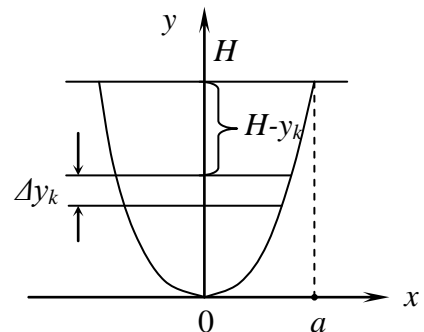


Рис. 7.56

Задача 6. Пластинка в форме параболического сегмента с высотой H и верхним основанием a , погружена верти-

кально в воду. Найти силу давления воды на каждую из сторон пластинки.

Парабола имеет уравнение вида $y = kx^2$. Полагая $x = a$, получим $y = H$, и значит $H = ka^2$, откуда $k = \frac{H}{a^2}$. Таким образом, уравнение

параболы $y = \frac{H}{a^2}x^2$, т. е. $x^2 = \frac{a^2 y}{H}$. Площадь горизонтальной полоски ширины Δy_k равна

$$\Delta S_k = 2x_k \Delta y_k = 2 \frac{a\sqrt{y_k}}{\sqrt{H}} \Delta y_k.$$

Сила давления воды на эту полоску

$$\Delta P_k = (H - y_k) \Delta S_k = 2 \frac{a\sqrt{y_k}}{\sqrt{H}} (H - y_k) \Delta y_k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P &= \frac{2a}{\sqrt{H}} \int_0^H \sqrt{y}(H - y) dy = \frac{2a}{\sqrt{H}} \int_0^H \left(Hy^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{3}{2}} \right) dy = \frac{2a}{\sqrt{H}} \left(\frac{2}{3} Hy^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} y^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^H = \\ &= \frac{2a}{\sqrt{H}} \left(\frac{2}{3} H^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5} H^{\frac{5}{2}} \right) = 2H^2 a \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{8a}{15} H^2. \end{aligned}$$

Задачи и упражнения к главе VII

1. При помощи определенного интеграла вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n} \right].$$

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2$.

3. Найти площадь фигуры ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = 8xy$.

4. Определить длину дуги линии $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$.

5. Вычислить длину дуги линии $y = \frac{x^2}{2} - 1$, отсеченной осью Ox .

6. Найти длину дуги линии

$$\begin{cases} x = \frac{t^3}{3}, \\ y = 4 - \frac{t^2}{2}, \end{cases}$$

заклученной между точками пересечения с осью Ox .

7. Ветвь гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($0 \leq y \leq H$)

вращается вокруг оси Oy . Вычислить объем получаемого при этом тела (рис. 7.57).

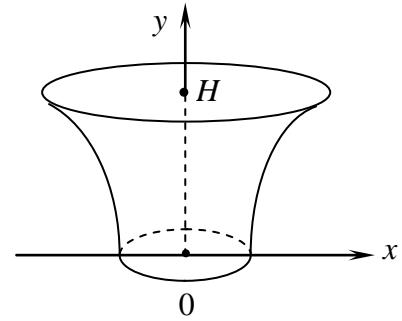


Рис. 7.57

8. На хордах астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, параллельных оси Oy , построены квадраты, стороны которых равны длинам хорд, и плоскости которых перпендикулярны плоскости xOy . Найти объем тела, образованного этими квадратами.

9. Вычислить момент инерции однородного полукольца радиуса R и массы M относительно касательной, параллельной диаметру (рис. 7.58).

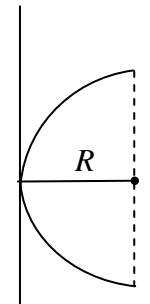


Рис. 7.58

10. Найти момент инерции однородной пластинки в форме эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ и массой M относительно оси Ox .

11. Вычислить момент инерции относительно оси Oy однородной пластинки с плотностью ρ , ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

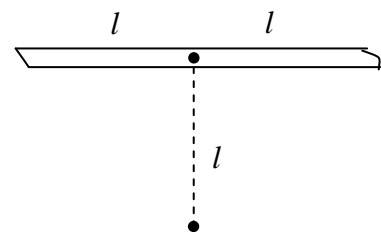


Рис. 7.59

12. С какой силой однородный стержень длины 2ℓ и массы M притягивает материальную точку массы m , расположенную относительно стержня так, как указано на рис. 7.59.

13. Эллиптическая пластинка с полуосями a и b и с плотностью ρ вращается с угловой скоростью ω вокруг оси $2b$. Найти кинетическую энергию пластинки.

14. Однородная пластинка с плотностью ρ , ограниченная линиями

$x^2 - y^2 = 1$ и $x = 2$ ($x > 0$), вращается вокруг оси Oy с угловой скоростью ω . Найти ее кинетическую энергию.

15. Однородный полукруг радиуса R и массы M , может вращаться вокруг горизонтальной оси, совпадающей с его диаметром, но удерживается в горизонтальном положении вертикальной нитью, рис. 7.60. Пользуясь теоремой о моментах сил, найти натяжение нити.

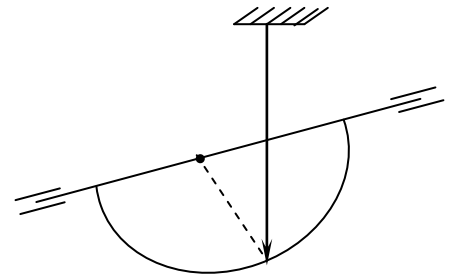


Рис. 7.60

16. Учитывая изменение силы тяжести с высотой, найти работу по поднятию тела массы m на высоту H над поверхностью Земли (радиус Земли равен R , а ее масса – M).

17. Вычислить момент инерции однородного квадрата со стороной a и массой M относительно оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали, рис. 7.61.

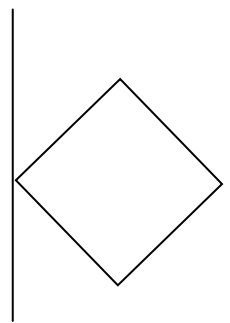


Рис. 7.61

18. Однородный стержень длины ℓ и массы M вращается в горизонтальной плоскости вокруг своего конца с угловой скоростью ω . Найти натяжение в точке закрепления, возникающее в результате действия центробежной силы, рис. 7.62.

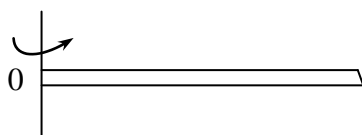


Рис. 7.62

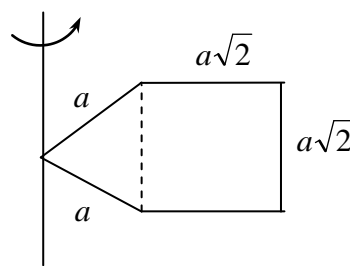


Рис. 7.63

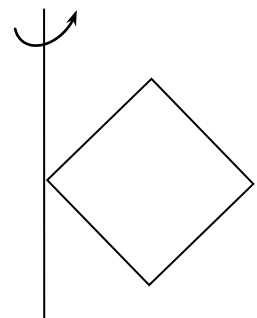


Рис. 7.64

19. Изображенная на рис. 7.63 однородная пластинка с плотностью ρ вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω . Найти натяжение в точке закрепления, возникающее в результате действия центробежной силы.

20. Квадрат со стороной a и массой M вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали (рис. 7.64), с угловой скоростью ω . Найти натяжение в точке закрепления, возникающее в ре-

зультате действия центробежной силы.

21. Найти момент инерции однородного параболического тела (рис. 7.65) относительно его оси.

22. Вычислить потенциальную энергию опрокинутого однородного параболоида вращения (рис. 7.66), если его плотность равна ρ .

23. Однородное тело с плотностью ρ , ограниченное параболоидом

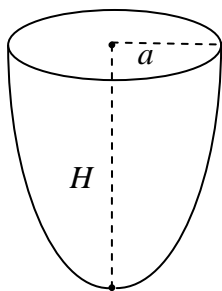


Рис. 7.67

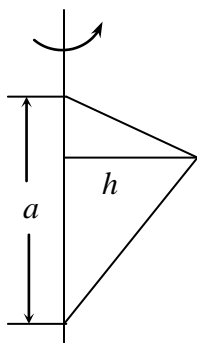


Рис. 7.68

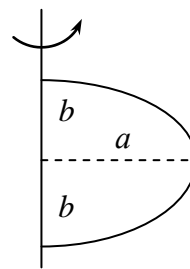


Рис. 7.69

вращения (рис. 7.67) и плоскостью, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω . Найти его кинетическую энергию.

24. Ветер оказывает равномерное давление p на треугольный флюгер с основанием a и высотой h . Найти суммарный момент силы давления

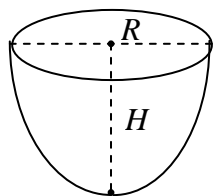


Рис. 7.65

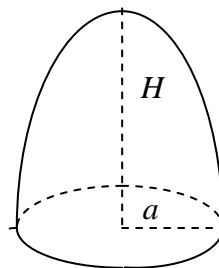


Рис. 7.66

относительно оси вращения (рис. 7.68).

25. Ветер оказывает равномерное давление p на флюгер в форме параболического сегмента (рис. 7.69). Найти суммарный момент силы давления относительно оси флюгера.

VIII. Несобственные интегралы

1. Несобственные интегралы первого рода

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом участке отрезка $[a, b]$, где $b > a$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^b f(x) dx.$$

При переменном b он является функцией аргумента b . Пусть $b \rightarrow +\infty$. Предел

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad (8.1)$$

называется несобственным интегралом функции $f(x)$ на промежутке $[a, +\infty]$ и обозначается символом

$$\int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (8.2)$$

Если предел (8.1) существует, то несобственный интеграл (8.2) называется сходящимся. В противном случае говорят, что несобственный интеграл (8.2) расходится. В частности, это будет тогда, когда предел (8.1) равен ∞ .

Если при всех $x \geq a$ будет $f(x) \geq 0$, то интеграл (8.2) геометрически представляет собой площадь заштрихованной бесконечной области, рис. 8.1.

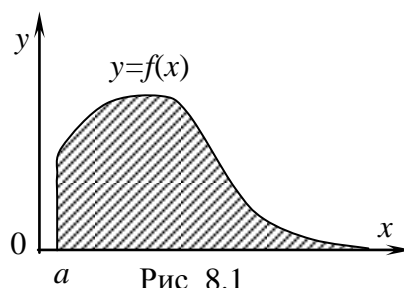


Рис. 8.1

Пример 8.1. Имеем

$$\int_1^b \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_1^b = 1 - \frac{1}{b},$$

а так как $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{b} = 0$, то $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$, т. е. интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится.

Пример 8.2. Аналогично

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^b = \ln b,$$

а значит

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = +\infty,$$

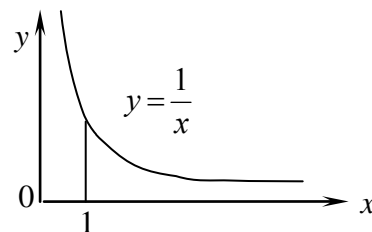


Рис. 8.2

т. е. интеграл $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$ расходится. Это вызвано тем, что функция $\frac{1}{x}$ убывает при $x \rightarrow \infty$ недостаточно быстро.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, +\infty]$. Тогда она имеет в нем первообразную $F(x)$ и

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Следовательно, интеграл (8.2) в этом случае сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел $F(+\infty) = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$, и в этом случае

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a). \quad (8.3)$$

Это равенство обобщает формулу Ньютона–Лейбница на случай несобственного интеграла (8.2).

Формула (8.3) позволяет не только установить сходимость или расходимость несобственного интеграла, но и вычислить его в случае сходимости. Однако часто бывает достаточно лишь исследовать интеграл (8.2) на сходимость. Для этого функцию $F(x)$ находить не обязательно, т. е. не обязательно выполнять интегрирование. Укажем на этот счет наиболее простые признаки сходимости несобственных интегралов, известные как признаки сравнения.

1°. Если при всех $x \geq a$ будет $0 \leq f(x) \leq q(x)$, то из сходимости интеграла $\int_a^{\infty} q(x)dx$ вытекает и сходимость интеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$.

■ Действительно, пусть

$$\int_a^{\infty} q(x)dx = Q,$$

где Q – некоторое число.

Тогда при любом $b > a$ будет $\int_a^b q(x)dx \leq Q$, а значит тем более

$$\int_a^b f(x)dx \leq Q.$$

Итак, при $b \rightarrow +\infty$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ возрастает, но не превосходит

числа Q , а значит существует предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \leq Q,$$

что и требовалось доказать. \square

2°. Если при всех $x \geq a$ будет $0 \leq q(x) \leq f(x)$, и интеграл $\int_a^{\infty} q(x) dx$ рас-

ходится, то расходится и интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$.

■ Действительно, в силу условия,

$$\int_a^b q(x) dx \rightarrow +\infty,$$

а так как при любом $b > a$ будет $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b q(x) dx$, то и $\int_a^b f(x) dx \rightarrow \infty$. \square

Примечание. Очевидно, что интегралы $\int_a^{\infty} f(x) dx$ и $\int_c^{\infty} f(x) dx$ одновре-

менно или сходятся или расходятся, если только в промежутке $[a, c]$ (или $[c, a]$, если $c < a$) функция $f(x)$ интегрируема. В связи с этим неравенство $0 \leq f(x) \leq q(x)$ в признаке 1° и неравенство $0 \leq q(x) \leq f(x)$ в признаке 2° могут выполняться не при всех $x \geq a$, а лишь начиная с некоторого $x = c > a$.

3° (предельный признак сходимости). Если, начиная с некоторого $x = a$ будет $f(x) \geq 0$, $q(x) \geq 0$, и при $x \rightarrow +\infty$ функции $f(x)$ и $q(x)$ есть бесконечно малые одного порядка: $q(x) = O^*[f(x)]$, т. е.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{q(x)} = m$ ($m > 0$), то интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ и $\int_a^{\infty} q(x) dx$ одновременно или

сходятся, или расходятся.

■ В силу условия

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{q(x)} = m,$$

где $m > 0$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $M > 0$, что

$$(x > M) \Rightarrow \left(\left| \frac{f(x)}{q(x)} - m \right| < \varepsilon \right),$$

т. е.

$$(x > M) \Rightarrow \left(m - \varepsilon < \frac{f(x)}{q(x)} < m + \varepsilon \right). \quad (8.4)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $M \geq a$. Тогда из выражения (8.4) будем иметь

$$(x > M) \Rightarrow ((m - \varepsilon)q(x) < f(x) < (m + \varepsilon)q(x)).$$

Поскольку ε произвольно, будем считать, что $\varepsilon < m$. Тогда

$$(x > M) \Rightarrow \underline{(0 \leq (m - \varepsilon)q(x) < f(x) < (m + \varepsilon)q(x))}. \quad (8.5)$$

Пусть интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится. Тогда, на основании (8.5) и при-

знака 1°, сходится интеграл $\int_a^\infty (m - \varepsilon)q(x)dx$, а значит сходится и интеграл

$$\int_a^\infty q(x)dx.$$

Если же интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ расходится, то, в силу (8.5) и признака 2°,

расходится интеграл $\int_a^\infty (m + \varepsilon)q(x)dx$, а значит расходится и интеграл

$$\int_a^\infty q(x)dx. \square$$

Очевидно, и в признаке 3° неравенства $f(x) \geq 0$, $q(x) \geq 0$ могут выполняться не при всех $x \geq a$, а лишь начиная с некоторого $x = c > a$.

Исследуем теперь на сходимость $\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$, где $k \neq 1$ (случай, когда $k = 1$, уже был рассмотрен в примере 8.2). Имеем

$$F(x) = \frac{x^{-k+1}}{-k+1} = -\frac{1}{(k-1)x^{k-1}}.$$

Следовательно, если $k > 1$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, а значит интеграл сходится.

Если же $k < 1$, то $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \infty$, и интеграл расходится.

Таким образом, интеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^k}$ сходится при всех $k > 1$ и расходится,

если $k < 1$.

Отсюда и из признака 3° вытекает следующее утверждение:

Теорема 8.1. Если $f(x) \geq 0$ начиная с некоторого x , и если при $x \rightarrow +\infty$ будет $f(x) \approx O^*\left(\frac{1}{x^k}\right)$, то интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится при $k > 1$ и расходится, если $k \leq 1$.

Пример 8.3. Исследуем на сходимость интеграл $\int_a^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3 \sqrt{x-1}} dx$. Имеем при $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x^3 \sqrt{x-1}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{x^{4/3}} = O^*\left(\frac{1}{x^{4/3}}\right),$$

а так как $\frac{4}{3} > 1$, то, на основании теоремы 8.1., данный интеграл сходится.

В признаках 1°–3° фигурировали несобственные интегралы от неотрицательных функций. Возьмем теперь случай, когда при $x > a$ функция $f(x)$ произвольным образом может менять знак. Укажем для этого случая следующий признак.

4°. Если сходится интеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$.

В этом случае последующий интеграл называют абсолютно сходящимся, а поэтому признак 4° означает, что если интеграл сходится абсолютно, то он сходится и в обычном смысле. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

■ Для доказательства признака 4° введем функции $\varphi(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$ и $\psi(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$. Очевидно, что $\varphi(x) \geq 0$ и $\psi(x) \geq 0$ для всех x , и

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x), \quad |f(x)| = \varphi(x) + \psi(x).$$

Пусть интеграл $\int_a^\infty |f(x)|dx$ сходится и равен некоторому числу Q . Тогда величина $\int_a^\infty |f(x)|dx$, монотонно возрастающая при $b \rightarrow +\infty$, не превосходит при этом, числа Q . Но

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b \varphi(x) dx + \int_a^b \psi(x) dx.$$

Каждый из интегралов справа неотрицателен и не убывает при $b \rightarrow +\infty$, оставаясь меньше числа Q . Следовательно, оба этих интеграла имеют пределы при $b \rightarrow +\infty$. Обозначим их Q_1 и Q_2 ; очевидно, что $Q_1 + Q_2 = Q$. Но тогда

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \varphi(x) dx - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \psi(x) dx = Q_1 - Q_2,$$

т. е. интеграл $\int_a^\infty f(x) dx$ сходится, что и требовалось доказать. \square

Мы рассматривали до сих пор несобственные интегралы вида $\int_a^\infty f(x) dx$. Подобно этому вводится и несобственный интеграл $\int_{-\infty}^a f(x) dx$. По определению,

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x) dx.$$

Очевидно, что для такого интеграла верно (с соответствующими перифразировками) все то, что было сказано об интегралах вида (8.2).

Сумму интегралов $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ и $\int_a^\infty f(x) dx$ условно обозначим через

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^a f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx,$$

причем величины c и b стремятся соответственно к $-\infty$ и к $+\infty$ независимо одна от другой. Если хотя бы один из пределов в правой части не существует, т. е. если хотя бы один из интегралов $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ и $\int_a^\infty f(x) dx$ расхо-

дится, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ считается расходящимся.

Интегралы вида $\int_{-\infty}^a f(x) dx$, $\int_a^\infty f(x) dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ называют несобствен-

ными интегралами с бесконечными пределами, или несобственными интегралами 1-го рода.

Часто встречаются пределы $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b f(x) dx$. Такой предел называется

главным значением несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ и обозначается

v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Очевидно, что если интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится

и его главное значение, и в этом случае

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \approx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

однако из сходимости интеграла v.p. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ еще не следует сходимость

самого интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. Например,

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{-b}^b \frac{x dx}{1+x^2} = 0$$

(ввиду нечетности подынтегральной функции). В то же время сам интеграл

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$ расходится, так как $(x \rightarrow \infty) \Rightarrow \left(\frac{x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x}\right) \right)$, а значит каж-

дый из интегралов $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$ и $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{1+x^2}$ расходится.

2. Несобственные интегралы 2-го рода

Пусть функция $f(x)$ задана в промежутке $[a, b]$, но $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$.

Будем также считать, что функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[c, b]$, где $a < c < b$. На отрезке же $[a, b]$ функция $f(x)$ не может быть интегрируемой, так как она не ограничена на нем.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число, такое, что $a + \varepsilon < b$. Рассмотрим

интеграл $\int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$. Предположим, что $\varepsilon \rightarrow 0$. Предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

называется несобственным интегралом от неограниченной функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ и обозначается обычным символом $\int_a^b f(x) dx$. Если этот предел существует, то интеграл называется сходящимся. В противном случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$

расходится.

Если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ геометрически представляет собой площадь заштрихованной бесконечной области (рис. 8.3). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b]$ и пусть $F(x)$ – одна из ее первообразных. Тогда

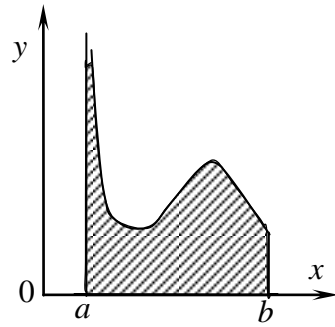


Рис. 8.3

Следовательно, интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(a + \varepsilon)$. Это будет, в частности, когда функция $F(x)$ непрерывна в точке $x = a$ (хотя бы справа). Обозначая предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(a + \varepsilon)$ через $F(a)$, получим

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F(b) - F(a + \varepsilon)] = F(b) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(a + \varepsilon).$$

Следовательно, интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(a + \varepsilon)$. Это будет, в частности, когда функция $F(x)$ непрерывна в точке $x = a$ (хотя бы справа). Обозначая предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(a + \varepsilon)$ через $F(a)$, получим

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Это обобщение формулы Ньютона–Лейбница на случай интеграла от неограниченной функции.

В качестве примера рассмотрим интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$, и исследуем его на сходимость при различных k . Имеем в данном случае

$$F(x) = \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} = \frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}. \quad (8.6)$$

Если $k < 1$, то, очевидно, $\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) < 0$. Если же $k > 1$, то $\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = \infty$. Если же $k = 1$, то вместо (8.6) имеем

$$F(x) = \ln(x - a),$$

а значит $\lim_{x \rightarrow a+0} F(x) = \infty$.

Итак, интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$ сходится при всех $k < 1$ и расходится, если

$k \geq 1$.

Нетрудно видеть, что свойства интегралов от неограниченных функций аналогичны соответствующим свойствам несобственных интегралов 1-го рода.

Например, предельный признак сходимости, по аналогии с признаком 3°, читается так.

3°. Если при $x \rightarrow a+0$ функции $f(x)$ и $q(x)$ являются неотрицательными бесконечно большими одного порядка, то интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и

$\int_a^b q(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Из этого признака и из результата, полученного для интеграла $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^k}$, следует утверждение.

Теорема 8.2. Если при $x \in (a, b]$ будет $f(x) \geq 0$ и если

$$(x \rightarrow a+0) \Rightarrow \left(f(x) = O^* \left(\frac{1}{(x-a)^k} \right) \right),$$

то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится при $k < 1$ и расходится при $k \geq 1$.

Пример 8.4. Исследуем на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} \operatorname{arctg} x}{e^{(e^{x^2}-1)} \cos x} dx$.

Если $x \rightarrow +0$, то

$$\frac{\sqrt{x} \operatorname{arctg} x}{(e^{x^2}-1) \cos x} \sim \frac{\sqrt{x} x}{x^2} = \frac{1}{x^{1/2}},$$

а так как $\frac{1}{2} < 1$, то интеграл сходится.

Мы рассматривали интеграл $\int_a^b f(x)dx$ для случая, когда $f(x) \rightarrow \infty$

при $x \rightarrow a+0$. Совершенно аналогично вводится несобственный интеграл для функции, бесконечно большой при $x \rightarrow b-0$. В этом случае, по определению,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если же $f(x)$ обращается в бесконечность в точке $c \in (a, b)$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

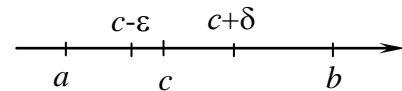


Рис. 8.4

т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{c+\delta}^b f(x)dx,$$

где ε и δ стремятся к нулю независимо друг от друга, рис. 8.4. Если хотя

бы один из пределов в правой части не существует, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$

является расходящимся. Формула Ньютона–Лейбница в этом случае, во-

обще говоря, не имеет места. Например, для интеграла $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ она дает

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -1 - 1 = -2,$$

что абсурдно, поскольку интеграл от положительной функции не может быть отрицательным (в данном случае этот интеграл вообще расходится, так как $k = 2 > 1$).

Аналогично рассматривается случай, когда функция $f(x)$ обращается в бесконечность не в одной, а в нескольких точках отрезка $[a, b]$.

Интегралы от функций, неограниченных в промежутке интегрирования, называют несобственными интегралами 2-го рода.

Примечание 1. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода не следует противопоставлять друг другу, поскольку вторые получаются из первых, если в них, грубо говоря, поменять местами аргумент и функцию. Пусть, например,

$$(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \left(y = O^* \left(\frac{1}{x^k} \right) \right).$$

Тогда

$$(y \rightarrow +0) \Rightarrow \left(x = O^* \left(\frac{1}{y^{1/k}} \right) \right),$$

а поэтому, если интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится при $k > 1$, то интеграл $\int_0^1 f(x) dx$,

$(x \rightarrow +0) \Rightarrow \left(f(x) = O^* \left(\frac{1}{x^k} \right) \right)$, сходится при $\frac{1}{k} > 1$, т. е. при $k < 1$.

Примечание 2. Помимо несобственных интегралов 1-го и 2-го рода, встречаются и интегралы, имеющие одновременно несобственность и 1-го и 2-го рода. Каждый такой интеграл можно представить в виде суммы нескольких несобственных интегралов либо 1-го либо 2-го рода. Интеграл является сходящимся, если сходится каждый из составных интегралов.

Пример 8.5. Пусть

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x dx}{(\sqrt{x^6 + 1}) \ln(1 + \sqrt{x^5})}.$$

Очевидно

$$I = \int_0^1 \frac{x \operatorname{arctg} x dx}{(\sqrt{x^6 + 1}) \ln(1 + \sqrt{x^5})} + \int_1^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x dx}{(\sqrt{x^6 + 1}) \ln(1 + \sqrt{x^5})}.$$

Для первого интеграла имеем

$$(x \rightarrow 0) \Rightarrow \left(f(x) \sim \frac{x^2}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{1/2}} \right),$$

а значит, этот интеграл сходится.

Для второго же интеграла получим

$$(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \left(f(x) \sim \frac{\frac{\pi}{2} x}{x^3 \ln(1 + \sqrt{x^5})} < \frac{\frac{\pi}{2} x}{x^4} = O^* \left(\frac{1}{x^3} \right) \right),$$

так что и этот интеграл сходится, а значит, сходится и первоначальный интеграл I .

Пример 8.6. Возьмем интеграл $\int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx$, где $q \geq 0$. При $x \rightarrow +\infty$

будет $f(x) \sim \frac{x^p}{x^q} = \frac{1}{x^{q-p}}$, так что для сходимости должно быть $q - p > 1$.

Далее, при $x \rightarrow +0$ будет $f(x) \sim x^p = \frac{1}{x^{-p}}$, а значит сходимость означает,

что $-p < 1$, т. е. $p > -1$.

3. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле

Пусть интеграл $\int_a^b f(x) dx$ – несобственный. Для определенности бу-

дем считать, что “несобственность” этого интеграла связана с верхним пределом интегрирования. При этом с целью одновременного рассмотрения несобственных интегралов как 1-го, так и 2-го рода, говоря об интегра-

ле $\int_a^b f(x) dx$, не будем исключать и случай, когда, например, $b = +\infty$.

Покажем, что на случай несобственных интегралов обобщаются формулы интегрирования по частям и замены переменной.

Возьмем интеграл $\int_a^b u dv$, где функции $u(x)$, $v(x)$, а так же $u'(x)$ и

$v'(x)$ непрерывны в промежутке $[a, b)$. Пусть $c \in [a, b)$ – произвольное число. Тогда, как мы знаем,

$$\int_a^c u dv = [u(c)v(c) - u(a)v(a)] - \int_a^c v du$$

(оба интеграла здесь собственные, и их существование очевидно). Переходя теперь к пределу при $c \rightarrow b - 0$, получим

$$\int_a^b u dv = [u(b)v(b) - u(a)v(a)] - \int_a^b v du,$$

т. е.

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (8.7)$$

Здесь под $u(b)v(b)$ подразумевается предел $\lim_{x \rightarrow b-0} u(x)v(x)$. Если этот предел существует, то из сходимости интеграла $\int_a^b v du$ следует сходимость

интеграла $\int_a^b u dv$ и наоборот.

Примечание 1. Легко видеть, что формула (8.7) верна и в случае, когда “несобственность” интеграла связана с его нижним пределом.

Примечание 2. Формула (8.7) бывает полезной не только для вычисления сходящегося несобственного интеграла, но и для самого исследования интеграла на сходимость, поскольку может случиться, что интеграл $\int_a^b v du$ в этом случае проще исходного интеграла $\int_a^b u dv$. Возможен даже слу-

чай, когда исходный интеграл $\int_a^b u dv$ является несобственным, а интеграл

$\int_a^b v du$ — уже собственный.

Пример 8.7. Возьмем интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$. Он является несобствен-

ным, поскольку $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} = -\infty$. Формула (8.7) дает

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x d\sqrt{x} = 2 \left[\sqrt{x} \ln \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \operatorname{ctg} x dx \right].$$

Но, по правилу Лопиталья,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \ln \sin x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{ctg} x}{-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}} = -2 \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x^3}}{\sin x} = 0.$$

Следовательно,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x} \operatorname{ctg} x dx.$$

Вновь полученный интеграл легче исследовать на сходимость, чем исходный. Имеем при $x \rightarrow +0$

$$\sqrt{x} \operatorname{ctg} x \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{x^{1/2}},$$

а так как $\frac{1}{2} < 1$, то интеграл сходится.

Рассмотрим теперь интеграл $\int_a^b f(x) dx$ и предположим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $[a, b)$. Произведем в нем замену переменной по формуле $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – монотонно возрастающая функция, а ее производная $\varphi'(t)$ непрерывна в промежутке $[\alpha, \beta]$ изменения переменной t , отвечающем промежутку $[a, b)$ изменения величины x (последнее означает, в частности, что $\varphi(\alpha) = a$, $\lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t) = b$).

Пусть $c \in (a, b)$ – произвольное число, а $\gamma \in (\alpha, \beta)$ – отвечающее ему значение переменной c . Тогда, как мы видели,

$$\int_a^c f(x) dx = \int_\alpha^\gamma f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

(существование каждого из этих собственных интегралов очевидно). Переходя теперь к пределу при $c \rightarrow b-0$ (что равносильно соотношению $\gamma \rightarrow \beta-0$), получим

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (8.8)$$

При этом, как и для формулы (8.7), мы не просто установили равенство

двух интегралов, но и показали, что сходимость одного из них влечет за собой сходимость другого.

Легко видеть, что формула (8.8) верна и в случае монотонного убывания функции $\varphi(t)$ в промежутке (α, β) .

Кроме того, легко убедиться, что для формулы (8.8) справедливы оба примечания, сделанные в связи с формулой (8.7).

Пример 8.8. Рассмотрим интеграл $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$. Его сходимость следует из того, что

$$(x \rightarrow +\infty) \Rightarrow \left(\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = O^* \left(\frac{1}{x^3} \right) \right).$$

Для вычисления этого интеграла положим $x = \operatorname{tg} t$. Эта замена превращает исходный интеграл в собственный. Действительно,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 t \, dt}{\cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Задачи и упражнения к главе VIII

Исследовать на сходимость интегралы:

$$1. \int_0^{\infty} \frac{x \, dx}{(x^3 + 1)^2}; \quad 2. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} \, dx; \quad 3. \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} \, dx;$$

$$4. \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+2}{x+1} \, dx; \quad 5. \int_0^2 \frac{\sqrt{x}}{3^x - 2^x} \, dx; \quad 6.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\ln^{\varphi}(1+\sqrt{x}) \ln^{\eta}(1+\sqrt{x})}.$$

7. Бесконечный прямолинейный однородный стержень плотности ρ притягивает материальную точку массы m , удаленную от стержня на расстояние a . Вычислить силу притяжения.

IX. Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. Точки и окрестности в n -мерном пространстве

Точкой n -мерного пространства R^n (или R_n) называют упорядоченную совокупность n вещественных чисел x_1, x_2, \dots, x_n . Будем это записывать так:

$$M = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

или, что то же самое, $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Числа x_1, x_2, \dots, x_n называют координатами точки M .

Расстоянием между точками $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $N(y_1, y_2, \dots, y_n)$ назовём величину

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

Мысленно вводя в n -мерном евклидовом пространстве E_n векторы $\vec{x}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $\vec{y}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ и замечая, что

$$\rho(M, N) = |\vec{x} - \vec{y}|,$$

заключаем, что $\rho(M, N)$ обладает следующими свойствами модуля:

- 1°. $\rho(M, N) \geq 0$, причём $(\rho(M, N) = 0) \Leftrightarrow (M = N)$;
- 2°. $\rho(N, M) = \rho(M, N)$ для любых точек M и N из R_n ;
- 3°. $\rho(M, P) \leq \rho(M, N) + \rho(N, P)$ (неравенство треугольника).

Пусть дана точка $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in R_n$. Совокупность точек $M \in R_n$ таких, что $\rho(M_0, M) < \varepsilon$, называется ε -окрестностью точки M_0 и обозначается $C_\varepsilon(M_0)$. Таким образом,

$$C_\varepsilon(M_0) = \{M | M \in R_n, \rho(M_0, M) < \varepsilon\},$$

т. е.

$$C_\varepsilon(M_0) = \left\{ M(x_1, x_2, \dots, x_n) \left| \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)})^2 < \varepsilon^2 \right. \right\}. \quad (9.1)$$

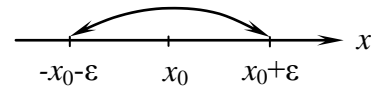


Рис. 9.1

При $n = 1$ имеем отсюда

$$C_\varepsilon(M_0) = \{x | |x - x_0| < \varepsilon\},$$

т. е. получаем окрестность точки на числовой оси в нашем прежнем понимании, рис. 9.1.

При $n = 2$ получим из (9.1)

$$C_\varepsilon(M_0) = \left\{ (x_1, x_2) \left| (x_1 - x_1^{(0)})^2 + (x_2 - x_2^{(0)})^2 < \varepsilon^2 \right. \right\},$$

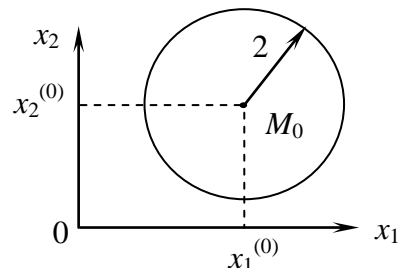


Рис. 9.2

т. е. в этом случае получаем внутренность круга

радиусом ε с центром в точке M_0 , рис. 9.2.

Аналогично при $n = 3$ $C_\varepsilon(M_0)$ есть внутренность шара радиуса ε с центром в точке M_0 .

Возьмём точку $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in R_n$, и пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ – произвольные положительные числа. Множество

$$Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(M_0) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i^{(0)} - \varepsilon_i < x_i < x_i^{(0)} + \varepsilon_i, \forall i = \overline{1, n}\}$$

называется n -мерным параллелепипедом с центром в точке M_0 . Очевидно, что при $n = 1$ будет

$$Q_\varepsilon(M_0) = C_\varepsilon(M_0);$$

при $n = 2$ $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(M_0)$ представляет собой прямоугольник с центром в точке M_0 и со сторонами длиной $2\varepsilon_1$ и $2\varepsilon_2$ параллельными координатным осям, рис. 9.3, и т. д.

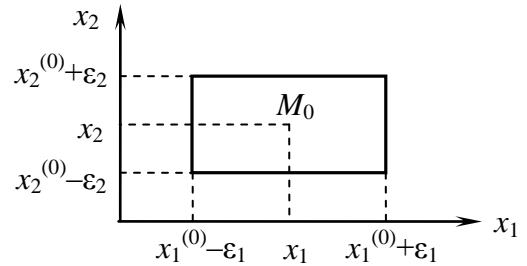


Рис 9.3

Лемма 9.1. При любом $\varepsilon > 0$ существует такой параллелепипед $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(M_0)$, что $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(M_0) \subset C_\varepsilon(M_0)$, и, наоборот, для любого $Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(M_0)$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $C_\varepsilon(M_0) \subset Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(M_0)$.

■ Пусть $M \in Q_{\delta, \delta, \dots, \delta}(M_0)$. Тогда $x_i^{(0)} - \delta < x_i < x_i^{(0)} + \delta$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, а значит

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)})^2} < \sqrt{n\delta^2} = \delta\sqrt{n}.$$

Поэтому, положив $\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, получим $(M \in Q_{\delta, \delta, \dots, \delta}(M_0)) \Rightarrow (M \in C_\varepsilon(M_0))$,

а это значит, что

$$Q_{\delta, \delta, \dots, \delta}(M_0) \subset C_\varepsilon(M_0). \quad (9.2)$$

Обратно, пусть даны $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. Обозначим $\varepsilon = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$. Тогда, если $M \in C_\varepsilon(M_0)$, то для любого $k = 1, 2, \dots, n$

$$|x_k - x_k^{(0)}| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^{(0)})^2} = \rho(M_0, M) < \varepsilon,$$

т. е.

$$|x_k - x_k^{(0)}| < \varepsilon \leq \varepsilon_i \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

м, что $\rho(M_0, M) < \varepsilon$. Таким образом,

Таким образом,

$$(M \in C_\varepsilon(M_0)) \Rightarrow (M \in Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(M_0)),$$

а это значит, что

$$C_\varepsilon(M_0) \subset Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(M_0). \quad (9.3)$$

Из соотношений (9.2) и (9.3) и следует утверждение леммы. \square

При $n = 2$ содержание леммы легко усматривается из чертежа (см. рис. 9.4).

Лемму 9.1 называют теоремой вложения.

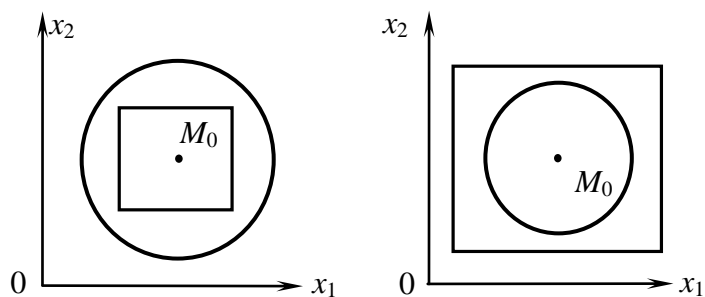


Рис. 9.4

2. Предел последовательности точек

Рассмотрим последовательность точек $\{M_k\} \in R_n$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). Точка $M \in R_n$ называется пределом последовательности $\{M_k\}$ (это записывается так: $M = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k$), если $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho(M_k, M) = 0$. Это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $K(\varepsilon)$, что

$$(k > K) \Rightarrow (M_k \in C_\varepsilon(M)).$$

Из леммы 9.1 следует, что $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = M$ тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n > 0$ найдётся такое $K(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$, что

$$(k > K) \Rightarrow (M_k \in Q_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n}(M)).$$

Очевидно, что если последовательность $\{M_k\}$ сходится к некоторой точке M , то к ней сходится и любая подпоследовательность $\{M_{k_\ell}\}$ этой последовательности.

Теорема 9.1. Для того, чтобы последовательность $\{M_k\} \in R_n$ сходилась к точке $M \in R_n$ необходимо и достаточно, чтобы для всех $i = 1, 2, \dots, n$ было

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = x_i. \quad (9.4)$$

■ **Необходимость.** Пусть $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = M$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $K(\varepsilon)$, что $(k > K) \Rightarrow (M_k \in C_\varepsilon(M))$, а значит тем более

$$(k > K) \Rightarrow (|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon, \forall i = \overline{1, n}),$$

откуда и следует (9.4).

Достаточность. Пусть для всех $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется (9.4). Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Для него найдётся такое $K(\varepsilon)$, что

$(k > K) \Rightarrow \left(|x_i^{(k)} - x_i| < \varepsilon, \forall i = \overline{1, n} \right)$, а поскольку $\rho(M_k, M) < \varepsilon\sqrt{n}$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = M$. \square

Из доказанной теоремы легко следует, что последовательность $\{M_k\}$ может иметь не более одного предела.

Множество $R \subset R_n$ называется ограниченным, если существует такое $L > 0$, что $R \subset C_L(0)$, т.е. если его можно заключить в некоторый шар с центром в начале координат.

Лемма 9.2. (Больцано-Вейерштрасса). Из любой ограниченной последовательности точек $M_k \in R_n$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

■ Пусть, для определённости, $n = 3$. Предположим, что последовательность точек $M_k(x_k, y_k, z_k)$ ограничена. Тогда ограничена каждая из числовых последовательностей $\{x_k\}$, $\{y_k\}$, $\{z_k\}$. На основании леммы Больцано-Вейерштрасса для числовых последовательностей, из ограниченной последовательности $\{x_k\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_i}\}$. Рассмотрим соответствующую подпоследовательность $\{y_{k_i}\}$. Являясь подпоследовательностью ограниченной последовательности $\{y_k\}$, она также ограничена, а значит содержит в себе сходящуюся подпоследовательность $\{y_{k_{ij}}\}$. Возьмём теперь соответствующую подпоследовательность $\{z_{k_{ij}}\}$. Она ограничена как подпоследовательность ограниченной последовательности $\{z_k\}$, а значит содержит в себе сходящуюся подпоследовательность $\{z_{k_{ijl}}\}$.

Возьмём теперь подпоследовательности $\{x_{k_{ijl}}\}$ и $\{y_{k_{ijl}}\}$. Они сходятся как подпоследовательности сходящихся последовательностей $\{x_{k_i}\}$ и $\{y_{k_i}\}$.

Итак, последовательности $\{x_{k_{ijl}}\}$, $\{y_{k_{ijl}}\}$, $\{z_{k_{ijl}}\}$ сходятся к некоторым пределам x, y, z , а это значит, на основании леммы 9.1, что последовательность $\{M_k(x_k, y_k, z_k)\}$ сходится к точке $M(x, y, z)$, что и требовалось доказать. \square

3. Открытые и замкнутые множества в R_n

Пусть $R \subset R_n$ – некоторое множество. Точка M называется внутренней точкой множества R , если она принадлежит ему вместе с некоторой своей окрестностью, т. е. если существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$(M \in R) \Rightarrow (C_\varepsilon(M) \subset R).$$

Множество называется открытым, если все его точки – внутренние.

Лемма 9.3. Любая ε окрестность любой точки $M \in R_n$ есть открытое множество.

■ Пусть $N \in C_\varepsilon(M)$. Обозначим $\delta = \varepsilon - \rho(M, N)$ и рассмотрим множество $C_\delta(N)$. Предположим, что $P \in C_\delta(N)$. Тогда $\rho(P, N) < \delta$, а значит в силу неравенства треугольника,

$$\rho(P, M) \leq \rho(P, N) + \rho(N, M) < \rho(N, M) + \delta,$$

т. е.

$$\rho(P, M) < \varepsilon,$$

а значит

$$C_\delta(N) \subset C_\varepsilon(M)$$

(см. рис. 9.5).

Таким образом, $N \in C_\varepsilon(M) \Rightarrow C_\delta(N) \subset C_\varepsilon(M)$, т. е. произвольная точка N множества $C_\varepsilon(M)$ является внутренней его точкой, что и требовалось доказать. □

Точку $M \in R_n$ будем называть точкой прикосновения множества $R \subset R_n$, если любая окрестность этой точки содержит хотя бы одну точку множества R .

Очевидно, каждая точка множества является его точкой прикосновения (поскольку она содержит в себе уже, по крайней мере, одну эту точку).

Если точка $M \in R$ имеет окрестность, не содержащую никаких других точек множества R , кроме самой точки M , то точка M называется изолированной точкой множества R .

Точка $M \in R_n$ называется предельной точкой (или точкой сгущения) множества R , если любая её окрестность содержит хотя бы одну точку множества R , отличную от M .

Очевидно, любая предельная точка множества является и его точкой прикосновения. Обратно, любая точка прикосновения является либо изолированной точкой множества, либо его предельной точкой (в последнем случае она может как принадлежать множеству, так и не

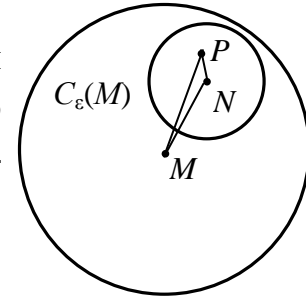


Рис. 9.5

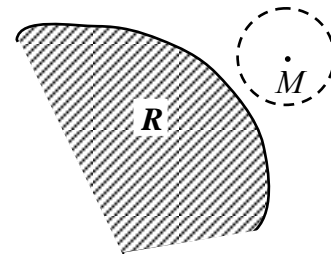


Рис. 9.6

принадлежать ему), рис. 9.6.

Пример 9.1. Пусть $n = 1$ и пусть $R = (0;1)$. Тогда все точки интервала $(0;1)$ являются предельными точками множества R , а значит и его точками прикосновения. Точки же $x = 0$ и $x = 1$ также являются предельными точками множества R , но не принадлежат этому множеству.

Пример 9.2. Если $R = [0;1]$, то точки $x = 0$ и $x = 1$ принадлежат множеству R , а значит, в этом случае множество точек прикосновения совпадает с самим множеством R .

Пример 9.3. Пусть множество R состоит из интервала $(0,1)$ и точки $x = 2$. Тогда точка $x = 2$ есть изолированная точка множества R , а множество его точек прикосновения есть объединение отрезка $[0,1]$ и точки $x = 2$.

Совокупность всех точек прикосновения множества R называется замыканием множества R и обозначается \bar{R} . Очевидно, что всегда $R \subset \bar{R}$.

Множество R называется замкнутым, если $\bar{R} = R$, т. е. если все точки прикосновения множества принадлежат этому множеству.

Например, множество $R = [0,1]$ в пространстве R_1 есть замкнутое множество.

Всё пространство R_n , как нетрудно видеть, одновременно есть и открытое, и замкнутое множество.

Лемма 9.4. Замыкание любого множества есть замкнутое множество.

■ Пусть $R \subset R_n$ – произвольное множество. Требуется доказать, что $\overline{(\bar{R})} = \bar{R}$. Выше мы отмечали, что всегда $R \subset \bar{R}$. Заменяя здесь R на \bar{R} , получим

$$\bar{R} \subset \overline{(\bar{R})}. \quad (9.5)$$

Поэтому, если мы докажем, что одновременно

$$\overline{(\bar{R})} \subset \bar{R}, \quad (9.6)$$

то отсюда и из (9.5) и будет следовать, что $\overline{(\bar{R})} = \bar{R}$.

Пусть $M \in \overline{(\bar{R})}$ – произвольная точка. Это значит, что M есть одна из точек прикосновения множества \bar{R} . Следовательно, в любой окрестности $C_\varepsilon(M)$ существует, по крайней мере, одна точка $N \in \bar{R}$. Поскольку $C_\varepsilon(M)$ есть открытое множество (лемма 9.3), то существует такая окрестность $C_\delta(N)$, что $C_\delta(N) \subset C_\varepsilon(M)$. Но соотношение $N \in \bar{R}$ означает, что N есть точка прикосновения множества R , а значит в $C_\delta(N)$ существует по крайней мере одна точка $R \in R$. Поскольку $C_\delta(N) \subset C_\varepsilon(M)$, то

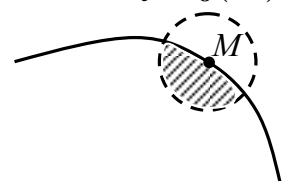


Рис. 9.7

тем более $P \in C_\varepsilon(M)$. Следовательно, в любой окрестности точки $M \in \overline{R}$ имеется точка P множества R , а это значит, что $M \in \overline{R}$. Таким образом, мы убедились, что $\left(M \in \overline{R} \right) \Rightarrow \left(M \in R \right)$ откуда и следует (9.6). \square

Точка $M \in R_n$ называется граничной точкой множества $R \subset R_n$, если в любой окрестности этой точки имеются как точки, принадлежащие множеству R , так и точки, не принадлежащие ему, рис. 9.7. При этом сама граничная точка может принадлежать множеству R , но может и не принадлежать этому множеству.

Совокупность всех граничных точек множества R называется его границей. Границу обычно обозначают ∂R . Очевидно, всегда

$$\partial R \subset \overline{R}$$

(поскольку каждая граничная точка множества является и его точкой прикосновения).

С другой стороны, каждая точка прикосновения множества является либо его граничной точкой, либо внутренней точкой этого множества, а значит

$$\overline{R} = R \cup \partial R.$$

Если R – открытое множество, то любая точка $M \in R$ – внутренняя, т. е. $M \notin \partial R$. Следовательно, в этом случае множества R и ∂R не имеют общих точек: $R \cap \partial R = \emptyset$.

Пример 9.4. Возьмём в пространстве R_3 шар

$$C_R(0) = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < R^2 \right\}.$$

В силу леммы 9.3 он является открытым множеством. Его замыканием является замкнутый шар

$$\overline{C_R(0)} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2 \right\}.$$

Сфера

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \right\}$$

одновременно является границей обоих шаров. Однако в первом случае множества R и ∂R не имеют общих точек, а во втором случае, очевидно, $\partial R \subset R$.

Пусть теперь $R = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2 \right\}$. Любая точка этого множества является граничной, и при том других граничных точек данное множество не имеет, т. е. в этом случае множество R полностью состоит из своей границы:

$$\partial R = R.$$

4. Линии и области в пространстве R_n

Множество точек $M \in R_n$, координаты которых являются непрерывными функциями некоторого параметра t :

$$x_i = \varphi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (9.7)$$

называется непрерывной кривой в пространстве R_n (точнее дугой этой кривой). При этом точки $A(x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha), \dots, x_n(\alpha))$ и $B(x_1(\beta), x_2(\beta), x_3(\beta), \dots, x_n(\beta))$ называют соответственно началом и концом дуги.

В частности, если

$$x_i = x_i^{(0)} + c_i t, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad -\infty < t < +\infty, \quad (9.8)$$

то получим бесконечную прямую, проходящую через точку $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, в направлении вектора $\vec{c} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Часть прямой, отвечающая изменению параметра t в некотором конечном промежутке, называется прямолинейным отрезком в пространстве R_n .

Соотношение (9.7) представим в развёрнутом виде:

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t), \\ x_2 = \varphi_2(t), \\ \text{-----} \\ x_n = \varphi_n(t). \end{cases}$$

Эти равенства естественно назвать параметрическими уравнениями данной линии. В частности, соотношениям (9.8) можно придать вид

$$\begin{cases} x_1 = x_1^{(0)} + c_1 t, \\ x_2 = x_2^{(0)} + c_2 t, \\ \text{-----} \\ x_n = x_n^{(0)} + c_n t. \end{cases}$$

Это – параметрические уравнения прямой в пространстве R_n . Разрешая последние равенства относительно t и приравнявая результаты, получим

$$\frac{x_1 - x_1^{(0)}}{c_1} = \frac{x_2 - x_2^{(0)}}{c_2} = \dots = \frac{x_n - x_n^{(0)}}{c_n},$$

а это – канонические уравнения данной прямой в пространстве R_n .

Множество $R \subset R_n$ называется связным, если две любые его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству. Примером связного множества может служить квадрат $\{(x_1, x_2) \mid |x_1| < 1, |x_2| < 1\}$, рис. 9.8. В то же время множество $R = C_2(0) \cup C_1(4)$

не является связным, рис. 9.9.

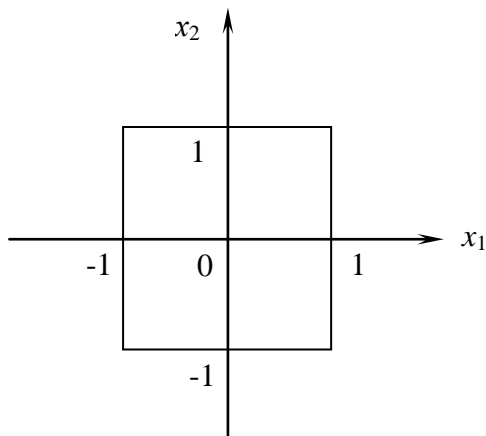


Рис. 9.8

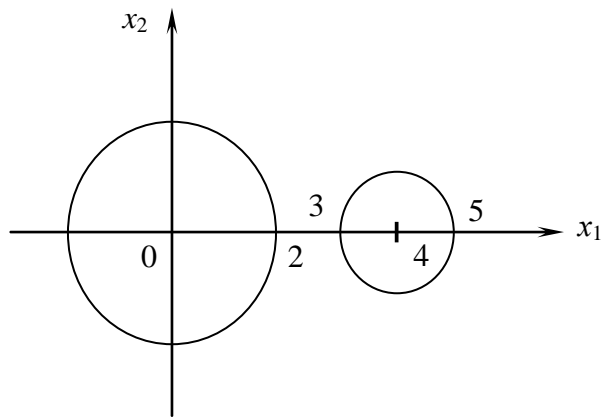


Рис. 9.9

Открытое связное множество называется областью.

Множество, являющееся замыканием некоторой области называется замкнутой областью. Примером области может служить множество, изображённое на рис. 9.8.

Пример замкнутой области (см. рис. 9.10)

$$- R = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1 \leq 4; 0 \leq x_2 \leq 2\}.$$

Ограниченную замкнутую область называют компактом.

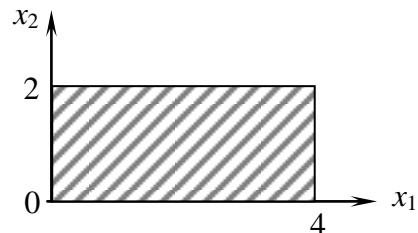


Рис. 9.10

5. Понятие функции n переменных

Пусть имеются n упорядоченных переменных: x_1, x_2, \dots, x_n . Предположим, что каждому конкретному набору этих переменных из некоторого множества $R \subset R_n$ отвечает одно или несколько значений вещественной переменной u . Тогда переменную u называют функцией n независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Это записывают так

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (9.9)$$

а множество R в этом случае называют областью определения данной функции (9.9) и обозначают D_u .

Если ввести точку $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в пространство R_n , то вместо (9.9) можно писать просто: $u = f(M)$, т. е. в этом случае u трактуется как «функция точки» в n -мерном пространстве R_n .

В дальнейшем, если не будет специальных оговорок, мы будем рассматривать только однозначные функции.

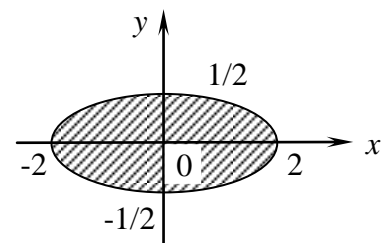


Рис. 9.11

Предположим, что число независимых переменных равно $n = 2$. То-

гда, вместо x_1 и x_2 , эти переменные будем обозначать x и y , а их функцию – через z , т. е. будем писать: $z = f(x, y)$. Область определения такой функции представляет собой некоторое множество точек (x, y) плоскости xOy .

Пример 9.5. Пусть $z = \sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$. Очевидно, $D_z = \{(x, y) | 1 - x^2 - 2y^2 \geq 0\} = \{(x, y) | x^2 + 2y^2 \leq 1\}$, т. е. область определения есть компакт, ограниченный эллипсом $x^2 + 2y^2 = 1$, рис. 9.11.

Пример 9.6. Пусть теперь $z = \ln(1 - x^2 - 2y^2)$. Очевидно, в данном случае $D_z = \{(x, y) | x^2 + 2y^2 < 1\}$, т. е. область определения ограничена тем же эллипсом, но является теперь не замкнутой, а открытой, рис. 9.12.

Пример 9.7. Пусть, наконец, $z = \sqrt{\ln xy}$. Тогда $D_z = \{(x, y) | \ln xy \geq 0\} = \{(x, y) | xy \geq 1\}$.

Легко видеть, что множество D_z в данном случае неограниченно и замкнуто, рис. 9.13.

Геометрически функция $z = f(x, y)$ изображается, вообще говоря, некоторой поверхностью в пространстве $Oxyz$. Эту поверхность естественно называть графиком данной функции, рис. 9.14.

При $n = 3$ независимые переменные x_1, x_2 и x_3 , обычно обозначают x, y и z , а поэтому равенство (9.9) пишут в виде $u = f(x, y, z)$. Областью определения такой функции является некоторое множество точек в пространстве $Oxyz$.

В отличие от функций двух переменных, функции большего числа независимых переменных не могут изображаться при помощи графика. Тем не менее, свойства функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, при произвольном n , совершенно аналогичны свойствам функций двух переменных. Иными словами, специфика функций *многих* переменных (по сравнению с функциями x

одной переменной) проявляется, в достаточно общем виде уже на функциях двух переменных. Поэтому, не ограничивая общности, а лишь во избежание излишней громоздкости записи,

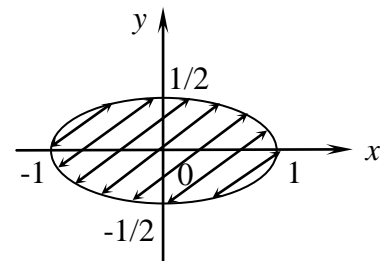


Рис. 9.12

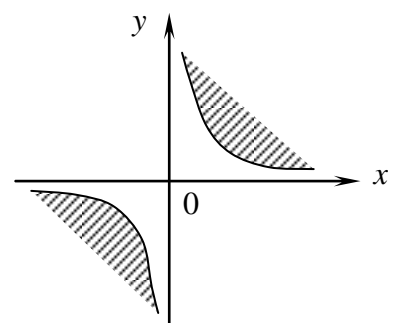


Рис. 9.13

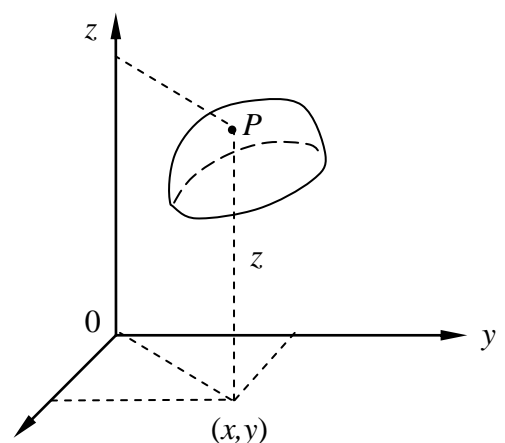


Рис. 9.14

и, кроме того, для сохранения возможности геометрической иллюстрации, мы будем рассматривать, главным образом, именно функции двух переменных.

6. Предел функции многих переменных

Число A называется пределом функции $f(x,y)$ в точке $M_0(a,b)$, если для любой последовательности точек $M_n(x_n, y_n) \in D_f$, сходящейся к точке M_0 *) будет $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = A$. В этом случае пишут, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A,$$

или

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A. \quad (9.10)$$

При этом молча предполагается, что величины x и y стремятся к числам a и b произвольным образом и независимо друг от друга, т. е. что точка $M(x,y)$ приближается к точке M_0 по произвольному пути (рис. 9.15).

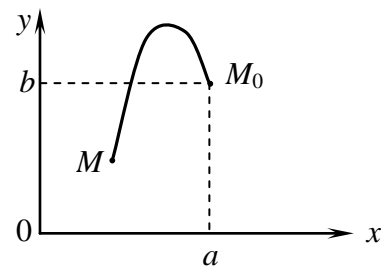


Рис. 9.15

Пример 9.8. Покажем, что функция $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не имеет предела в точке $O(0,0)$.

Для этого возьмём две различные последовательности точек: $\left\{M_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right\}$ и $\left\{N_n\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right)\right\}$ (это знач

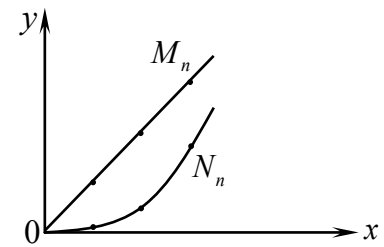


Рис. 9.16

чит, что в первом случае мы будем приближаться к точке O по прямой $y=x$, а во втором – по параболе $y = x^2$, рис. 9.16). Имеем

$$\lim_{M_n \rightarrow 0} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

*) Очевидно, в этом случае, точка M_0 должна быть предельной точкой множества D_f .

$$\lim_{N_n \rightarrow 0} \frac{x_n y_n}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = 0,$$

т. е. предел $\lim_{M \rightarrow 0} f(x, y)$ зависит от траектории приближения точки M к точке O .

В данном случае отсутствие предела функции в точке O связано, в частности, с тем, что в этой точке и числитель, и знаменатель функции обращаются в нуль. В то же время, например, в точке $M(1,1)$ функция имеет предел. Действительно, пусть $M_n \rightarrow (1,1)$ произвольным образом. Тогда $x_n = 1 + \alpha_n$, $y_n = 1 + \beta_n$, где $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$. Тогда

$$\lim_{(x_n, y_n) \rightarrow (1,1)} f(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \alpha_n)(1 + \beta_n)}{(1 + \alpha_n)^2 + (1 + \beta_n)^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

независимо от способа стремления к нулю бесконечно малых α_n и β_n . Таким образом,

$$\lim_{M \rightarrow (1,1)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

Как и для функции одной переменной, определение предела функции многих переменных можно сформулировать на языке $\varepsilon - \delta$: число A называется пределом функции $f(x, y)$ в точке $M_0(a, b)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$((x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2) \Rightarrow (|f(x, y) - A| < \varepsilon), \quad (9.11)$$

т. е.

$$(\rho(M, M_0) < \delta) \Rightarrow (|f(M) - A| < \varepsilon). \quad (9.12)$$

Очевидно, что, на основании леммы 9.1, вместо выражения (9.11) можно писать

$$(|a - x| < \delta, |y - b| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - A| < \varepsilon).$$

Отметим также, что выражения (9.10) и (9.12) записаны в форме, не зависящей от числа n независимых переменных.

Определение предела функции легко сформулировать и для случаев, когда, по крайней мере, одно из чисел a , b и A равно ∞ .

Заметим также, что, поскольку исходное определение предела функции было сформулировано на основе предела числовой последовательности, то теория пределов, построенная для функций одной переменной, легко переносится на случай функции многих переменных. Например, предел суммы любого конечного числа функций равен сумме их пределов и т. п.

7. Повторные пределы

Пусть существует предел $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y)$. Здесь предполагается, что x и y

стремятся к своим пределам a и b одновременно. Такой предел называют двойным, или двукратным (в случае функции трёх переменных предел $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b \\ z \rightarrow c}} f(x, y, z)$ называют тройным, или трёхкратным, и т. д.). Рассмотрим те-

перь следующий предел: $\lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right]$. Здесь уже предполагается, что

сначала производится предельный переход по переменной x , и лишь затем – по переменной y . Такой предел, в отличие от предыдущего, кратного, называют повторным. Меняя порядок предельного перехода, получим другой

повторный предел: $\lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right]$.

Пример 9.9. Возьмём функцию $f(x, y) = \frac{x^3 + 2y^2}{x^2 + y^2}$. Имеем

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y^2}{y^2} = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2y^2}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0,$$

т. е. в данном случае оба повторных предела существуют, но не равны между собой.

Пример 9.10. Пусть теперь $f(x, y) = \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^3}$. Тогда

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^3} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = 0,$$

т. е. один из повторных пределов существует, а другой – нет.

Пример 9.11. Пусть

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (y - x)^2}.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right] = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right] = 0,$$

т. е. оба повторных предела в точке O существуют и равны между собой. Между тем, предел $\lim_{M \rightarrow 0} f(x, y)$ не существует. Действительно, приближаясь к точке O вдоль прямой $y=x$, получим

$$\lim_{M \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4} = 1,$$

а двигаясь, например, вдоль оси Ox , будем иметь $\lim_{M \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, т. е. получаем два различных предела.

Пример 9.12. Пусть $f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$. Здесь, наоборот, оба повторных предела в точке O не существуют. В то же время, если одновременно $x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$, то первый множитель в выражении $f(x, y)$ бесконечно мал, а оба следующих множителя ограничены, так что $\lim_{M \rightarrow 0} f(x, y) = 0$, т. е. предел функции в точке O существует.

Теорема 9.2. Если

1) существует двойной предел $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A$, и

2) при любом фиксированном y существует предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) = \varphi(y)$.

То существует и повторный предел $\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right]$, и он равен двойному пределу.

■ По условию, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$(|x - a| < \delta, |y - b| < \delta) \Rightarrow (|f(x, y) - A| < \varepsilon). \quad (9.13)$$

возьмём произвольное $y \in (b - \delta, b + \delta)$ и зафиксируем его. Переходя в выражении (9.13) к пределу, при $x \rightarrow a$, получим

$$(|y - b| < \delta) \Rightarrow (|\varphi(y) - A| < \varepsilon).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{y \rightarrow b} \varphi(y) = A,$$

т. е.

$$\lim_{y \rightarrow b} \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right] = A,$$

что и требовалось доказать. \square

Легко видеть, что доказательство остаётся в силе и тогда, когда $A = \infty$. Кроме того, легко видоизменить доказательство для случаев, когда, по крайней мере, одно из чисел a и b заменено на ∞ .

Примечание. Пусть, кроме выполнения условий 1 и 2, существует при любом фиксированном x предел $\varphi(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$. Тогда, мысленно

поменяв местами величины x и y в проведённом только что доказательстве, получим, что существует и второй повторный предел:

$$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right],$$

также равный A , т. е. В этом случае оба повторных предела существуют и равны между собой.

8. Непрерывность и разрывы функций многих переменных

Пусть функция $f(x, y)$ определена на некотором множестве R в плоскости xOy и пусть $M_0(x_0, y_0)$ – некоторая предельная точка этого множества, причём $M_0 \in R$. Функция $f(x, y)$ называется непрерывной в точке M_0 , если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

т. е. если

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0). \quad (9.14)$$

На языке ε, δ это определение звучит так: функция $f(x, y)$ непрерывна в точке M_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что

$$(M \in R, \rho(M, M_0) < \delta) \Rightarrow (|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon). \quad (9.15)$$

Предположим теперь, что функция $z=f(x, y)$ определена на множестве R , и пусть $M_0(x_0, y_0)$ – некоторая точка этого множества. Придадим значению x приращение Δx , а y оставим неизменным.

Величина $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ называется частным приращением функции $z=f(x, y)$ по переменной x в точке M_0 и обозначается $\Delta_x z(M_0)$. Предположим теперь, что $x = x_0 = const$, а величина

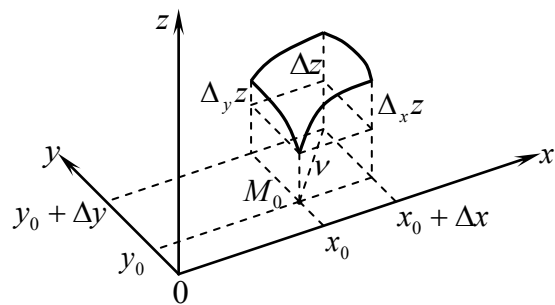


Рис. 9.17

$y = y_0$ получает приращение Δy . Разность $\Delta_y z(M_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ называется частным приращением функции по переменной y в точке M_0 . Пусть, наконец, величины x и y одновременно получают приращения Δx и Δy . Разность $\Delta z(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ называется полным приращением

функции в точке $M_0(x_0, y_0)$. Отметим, что, вообще говоря, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Введём обозначение

$$v = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Очевидно, что

$$(\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0) \Leftrightarrow (v \rightarrow 0).$$

Теперь равенству (9.14) можно придать вид

$$\lim_{v \rightarrow 0} \Delta z = 0. \quad (9.16)$$

Это равенство выражает определение непрерывности функции на языке приращений.

Равенство (9.14) и эквивалентное ему равенство (9.16) определяют непрерывность функции $z = f(x, y)$ по совокупности её переменных x и y .

Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, т. е. если $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta_x z = 0$. Анало-

гично определяется непрерывность функции $z = f(x, y)$ по переменной y . Очевидно, что если функция непрерывна в точке по совокупности переменных, то она непрерывна в этой точке и по каждой из них в отдельности. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример 9.13. Возьмём функцию, определённую так:

$$z = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{при } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0 & \text{при } (x = y = 0). \end{cases} \quad (9.17)$$

Мы видели (см. пример 9.8), что предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не существует,

так что функция (9.17) в точке $(0, 0)$ не непрерывна. В то же время $f(x, 0) = 0$ при всех x (включая и $x = 0$), а значит и $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0$, и аналогично,

$\lim_{y \rightarrow 0} f(y, 0) = 0$. Таким образом, функция $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ непрерывна по

каждой из переменных x и y , но не непрерывна по их совокупности.

Всё сказанное обобщается на случай функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В частности, выражения (9.14) и (9.15) в этом случае сохраняют прежний

вид, а вместо (9.16) получим $\lim_{v \rightarrow 0} \Delta u = 0$, где $v = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2}$.

Отметим, что в случае n переменных ($n \geq 3$) непрерывность функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по совокупности переменных влечёт за собой её непрерывность не только по каждой из них, но и непрерывность по каждой паре переменных x_i, x_k , непрерывность по каждой тройке переменных x_i, x_j, x_k

и т. д.

Функция $f(M)$ называется непрерывной на множестве $R \subset R_n$, если она непрерывна в каждой точке $M \in R$.

Всякая предельная точка области определения R функции $f(M)$, не являющаяся точкой непрерывности этой функции, называется её точкой разрыва.

Пример 9.14. Функция $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ имеет единственную точку разрыва $(0,0)$.

Пример 9.15. Функция $z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ имеет разрыв в каждой точке, для которой $x = y$, рис. 9.18.

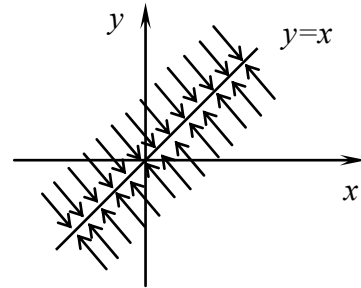


Рис. 9.18

9. Свойства непрерывных функций

Легко видеть, что на случай функций многих переменных переносятся теоремы о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций, теорема о непрерывности сложной функции, а также лемма о сохранении знака функции. В частности, последняя утверждает, что если функция $f(M)$ определена на множестве $R \subset R_n$ и непрерывна в его предельной точке $M_0 \in R$, причём $f(M_0) \neq 0$, то существует такая окрестность $C_\varepsilon(M_0)$, что на множестве $C_\varepsilon(M_0) \cap R$ функция $f(M)$ имеет тот же знак, что и $f(M_0)$.

Перейдём теперь к функциям, непрерывным не на произвольном множестве, а в некоторой области D .

Теорема 9.3. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D и существуют в D такие точки A и B , что $f(A)$ и $f(B)$ имеют разные знаки, то имеется по крайней мере одна такая точка $N(\varepsilon, n) \in D$, что $f(N) = 0$.

■ Поскольку множество D есть область, то оно связно. Поэтому точки A и B можно соединить некоторой непрерывной дугой $\overset{\sim}{AB}$. Пусть

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

её уравнения, и пусть точкам A и B отвечают значения параметра α и β . При монотонном изменении t от α до β

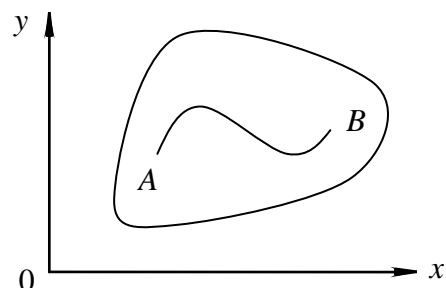


Рис. 9.19

точка $M(x, y)$ описывает дугу $A\check{B}$, рис. 9.19. Введём функцию $\phi(t) = f[\varphi(t), \Psi(t)]$. Поскольку функции $\varphi(t)$ и $\Psi(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, то и функция $\phi(t)$, на основании теоремы о непрерывности сложной функции, непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$. Но $f(A) = f[\varphi(\alpha), \Psi(\alpha)] = \phi(\alpha)$, и, точно так же, $f(B) = \phi(\beta)$, а так как, в силу условия, числа $\phi(\alpha)$ и $\phi(\beta)$ имеют разные знаки, то, на основании теоремы Больцано-Коши для функций одной переменной, существует по крайней мере одно значение $\theta \in (\alpha, \beta)$, такое, что $\phi(\theta) = 0$, т. е. $f[\varphi(\theta), \Psi(\theta)] = 0$, а значит существует по крайней мере одна точка $N \in A\check{B}$, что $f(N) = 0$. \square

Доказанная теорема обобщает 1-ю теорему Больцано-Коши на многомерный случай.

Теорема 9.4. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в области D . Тогда, принимая в ней два некоторых значения, она принимает в этой области и все промежуточные значения.

Примечание. Теоремы 9.3 и 9.4, очевидно, верны как для открытой, так и для замкнутой области D .

Теорема 9.5. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D , то она ограничена в ней и снизу, и сверху, т. е. существуют такие числа m и M , что для всех $(x, y) \in D$ будет $m \leq f(x, y) \leq M$.

Теорема 9.6. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области D , то она достигает в ней своих точных верхней и нижней граней, т. е. существуют такие точки $(x_1, y_1) \in D$ и $(x_2, y_2) \in D$, что $f(x_1, y_1) = M$, $f(x_2, y_2) = m$, где $M = \sup_D f(x, y)$, $m = \inf_D f(x, y)$.

Теоремы 9.5 и 9.6 называют соответственно 1-й и 2-й теоремами Вейерштрасса и доказываются, благодаря лемме Больцано-Вейерштрасса (см. лемму 9.2), точно так же, как и для функции одной переменной.

Функция $f(x, y)$, непрерывная в области D , называется равномерно непрерывной в ней, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для произвольных точек $M'(x', y') \in D$ и $M''(x'', y'') \in D$ будет

$$(\rho(M', M'') < \delta) \Rightarrow (|f(M') - f(M'')| < \varepsilon). \quad (9.18)$$

Неравенство $\rho(M', M'') < \delta$ означает, что $M'' \in C_\delta(M')$. Очевидно (см. лемму 9.1), вместо этого можно потребовать, чтобы было $M'' \in Q_{\delta, \delta}(M')$. Тогда вместо выражения (9.18) получим

$$(|x' - x''| < \delta, |y' - y''| < \delta) \Rightarrow (|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon).$$

Теорема 9.7 (Кантора). Если функция непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она и равномерно непрерывна в ней.

Доказательство не содержит в себе ничего нового по сравнению с

одномерным случаем (опять таки благодаря лемме Больцано-Вейерштрасса).

10. Частные производные функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ задана в некоторой области D . Возьмём точку $(x_0, y_0) \in D$ и придадим x приращение Δx , такое, что $(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$. Вычислим разность $\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ и составим отношение $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},$$

то он называется частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x и обозначается $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, или $f'_x(x_0, y_0)$. Аналогично определяется частная производная функции по переменной y :

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Если частные производные вычислены не в конкретной фиксированной точке (x_0, y_0) , а в «текущей» точке (x, y) , то их обозначают просто $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ (или $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$). При переменных x и y они являются, вообще говоря, функциями от x и y .

Очевидно, $\frac{\partial z}{\partial x}$ находится по обычным правилам и формулам дифференцирования, но при этом дифференцирование ведётся только по переменной x , а y считается постоянным. Аналогично, при вычислении $\frac{\partial z}{\partial y}$ предполагается, что $x = const$. Вообще, частная производная функции любого числа переменных по одной из них вычисляется в предположении, что все переменные, кроме переменной дифференцирования, сохраняют постоянные значения.

Пример 9.16. Пусть $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Пример 9.17. Пусть $u = x \sin(y + z^2)$. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(y + z^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cos(y + z^2), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 2z \cos(y + z^2)$$

Пример 9.18. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана неявно уравнением

$$xz^3 + yz^2 = x - y.$$

Дифференцируем это уравнение по переменной x как тождество в предположении, что $y = const$, а z есть функция от x . Получим

$$z^3 + x3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y2z \frac{\partial z}{\partial x} = 1,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - z^3}{3xz^2 + 2yz}.$$

Совершенно аналогично имеем

$$x3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + z^2 + y2z \frac{\partial z}{\partial y} = -1,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 + z^2}{3xz^2 + 2yz}.$$

Выясним геометрический смысл частных производных для случая двух независимых переменных. Возьмём функцию $f(x, y)$, произвольную точку (x_0, y_0) и проведём плоскости $x = x_0$ и $y = y_0$, перпендикулярные плоскости xOy . Они пересекут поверхность $z = f(x, y)$ по кривым $z = f(x_0, y)$ и $z = f(x, y_0)$, рис. 9.20. Функция $z = f(x, y_0)$ есть функция одной переменной: x , и её производная в точке x_0 равна

$$[f(x, y_0)]'_x \Big|_{x=x_0} = f'_x(x, y) \Big|_{y=y_0} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

В то же время она равна $\operatorname{tg} \alpha$, а значит

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Совершенно аналогично убеждаемся в том, что $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \operatorname{tg} \beta$.

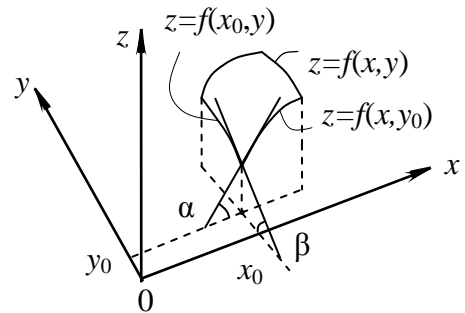


Рис. 9.20

Итак, частные производные функции $f(x, y)$ геометрически представляют собой тангенсы углов наклона касательных к сечениям поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $x = const$ и $y = const$.

11. Полный дифференциал функции

Предположим, что функция $z = f(x, y)$ и её частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ заданы в некоторой области, содержащей точку (x, y) , а в самой этой точке величины $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ есть непрерывные функции. Придав x и y приращения Δx и Δy , получим

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

т. е.

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)].$$

В силу теоремы Лагранжа, отсюда имеем

$$\Delta z = \frac{\partial f(\xi, y + \Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, n)}{\partial y} \Delta y,$$

где $\xi \in (x, x + \Delta x)$, $n \in (y, y + \Delta y)$.

Поскольку функции $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны в точке (x, y) , то

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\partial f(\xi, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\partial f(x, n)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

а значит

$$\frac{\partial f(\xi, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \alpha_1, \quad \frac{\partial f(x, n)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \alpha_2,$$

где α_1 и α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$.

Теперь получаем

$$\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y. \quad (9.19)$$

Если одновременно $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, то $\alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y = o(v)$, где, как мы ранее обозначали, $v = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. В то же время величина $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$ относительно Δx и Δy , а значит, если не будет од-

новременно $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0$, то

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y = O^*(v),$$

т. е. эта величина есть главная часть бесконечно малой Δz .

Главная часть бесконечно малого приращения функции, линейная относительно бесконечно малых Δx и Δy , называется полным дифференциалом этой функции и обозначается dz . Функция, имеющая в данной точке полный дифференциал, т. е. функция, полное приращение которой в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + o(v), \quad (9.20)$$

называется дифференцируемой в этой точке. Тем самым доказано, что если функция $z = f(x, y)$ имеет в данной точке непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, то она дифференцируема в этой точке.

Равенство (9.20) определяет дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ «по совокупности переменных x и y ». Мы видим, что это значительно больше, чем дифференцируемость данной функции по каждой из переменных x и y в отдельности. Ведь для получения формулы (9.20) мы предполагали, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке (x, y) не просто существуют, но и непрерывны. Одного же существования частных производных в данной точке может оказаться недостаточно для дифференцируемости функции в этой точке.

Пример 9.19. Возьмём функцию $z = \sqrt[3]{xy}$ и точку $(0,0)$. Имеем в этой точке

$$\Delta_x z = \sqrt[3]{(0 + \Delta x) \cdot 0} - \sqrt[3]{0 \cdot 0} = 0,$$

а значит и $f'_x(0,0) = 0$, и, аналогично, $f'_y(0,0) = 0$. Поэтому выражение (9.20) в этом случае запишется так:

$$\Delta z = o(v),$$

т. е.

$$\sqrt[3]{\Delta x \Delta y} = o(v). \quad (9.21)$$

Это равенство должно выполняться при любом способе стремления Δx и Δy к нулю. Между тем, при $\Delta x = \Delta y$ будем иметь из (9.21)

$$\sqrt[3]{\Delta x^2} = o(v),$$

т. е.

$$\sqrt[3]{\Delta x^2} = o(\Delta x),$$

что абсурдно. Таким образом, функция $z = \sqrt[3]{xy}$ имеет в точке $(0,0)$ обе частные производные, но не дифференцируема в ней.

Возвратимся к произвольной функции $z = f(x, y)$, фигурирующей в формуле (9.20). Назовём величины Δx и Δy дифференциалами независи-

мых переменных x и y и обозначим их соответственно dx и dy . Тогда формула для полного дифференциала примет вид

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (9.22)$$

Величины $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ и $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ называют частными дифференциалами функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y соответственно и обозначают $d_x z$ и $d_y z$. Тогда из (9.22) следует, что полный дифференциал функции равен сумме её частных дифференциалов.

Для функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вместо (9.20), очевидно, будем иметь

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i + o(v),$$

а полный дифференциал определяется формулой

$$du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i.$$

Пример 9.20. Пусть $z = \sqrt{x - y}$. Тогда

$$dz = \frac{1}{2\sqrt{x-y}} dx - \frac{1}{2\sqrt{x-y}} dy.$$

Пример 9.21. Для функции $u = xy^2z^3$ аналогично имеем

$$du = y^2z^3 dx + 2xyz^3 + 3xy^2z^2 dz.$$

Пример 9.22. Для иллюстрации приближенного равенства $\Delta z \approx dz$, вытекающего при малых v из (9.20), возьмём функцию $z = xy$. Вычислим её дифференциал и приращение в точке (4;3) при $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = 0,2$. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta z &= (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \cdot \Delta y = \\ &= 0,3 + 0,8 + 0,02 = 1,12; \end{aligned}$$

$$dz = y\Delta x + x\Delta y = 0,3 + 0,8 = 1,1.$$

Разность $\Delta z - dz$ есть обозначенная «двойной» штриховкой площадь малого прямоугольника со сторонами Δx и Δy .

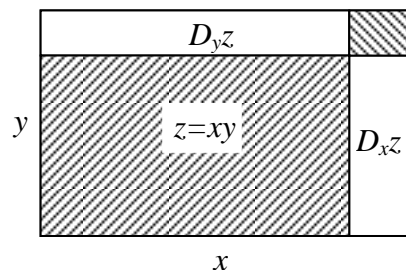


Рис. 9.21

12. Применение полных дифференциалов в приближенных вычислениях

1. На основании (9.20), при малых Δx и Δy будет

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y,$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y. \quad (9.23)$$

Пример 9.23. Вычислим приближённо $\sqrt{3,05^2 + 3,93^2}$. Для этого введём в рассмотрение функцию $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. В данном случае

$$x_0 = 3; \quad y_0 = 4; \quad \Delta x = 0,05; \quad \Delta y = -0,07; \quad f(x_0, y_0) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

а значит формула (9.23) даёт

$$\begin{aligned} \sqrt{3,05^2 + 3,93^2} &\approx f(x_0, y_0) + \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \Delta x + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \Delta y = \\ &= 5 + \frac{3 \cdot 0,05 - 4 \cdot 0,07}{5} = 5 - \frac{0,13}{5} = 4,974. \end{aligned}$$

2. Пусть из эксперимента получены следующие результаты:

$$x = x_0 \pm \delta x, \quad y = y_0 \pm \delta y,$$

где δx и δy – максимальные в условиях этого эксперимента погрешности, характеризующие степень точности эксперимента. Требуется по этим данным вычислить $z = f(x, y)$ и оценить погрешность полученного результата.

Пусть Δx и Δy – истинные погрешности измерения величин x и y . Тогда погрешность вычисления величины z равна

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y,$$

откуда

$$|\Delta z| \leq \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right| |\Delta y|. \quad (9.24)$$

Но о Δx и Δy известно лишь, что $|\Delta x| \leq \delta x$, $|\Delta y| \leq \delta y$. Поэтому из (9.24) следует, что тем более

$$|\Delta z| \leq \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \right| \delta x + \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right| \delta y.$$

Обозначая правую часть этого выражения через δz , получим окончательно

$$z = f(x_0, y_0) \pm \delta z.$$

Пример 9.24. Для радиуса основания и высоты цилиндра получены следующие данные:

$$R = 6 \text{ см} \pm 0,1 \text{ см}; \quad H = 10 \text{ см} \pm 0,2 \text{ см}.$$

Вычислим по ним объём цилиндра.

Из формулы $V = \pi R^2 H$ получаем, на основании (9.24),

$$|\Delta V| \leq \left| \frac{\partial V(R_0, H_0)}{\partial R} \right| \delta R + \left| \frac{\partial V(R_0, H_0)}{\partial H} \right| \delta H = 2\pi R_0 H_0 \delta R + \pi R_0^2 \delta H = \\ = (2 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 10 \cdot 0,1 + \pi \cdot 36 \cdot 0,2) \text{см}^3 = 19,2\pi \text{см}^3,$$

а значит

$$V = \pi \cdot 36 \cdot 10 \text{см}^3 \pm 19,2\pi \text{см}^3 = (360 \pm 19,2)\pi \text{см}^3.$$

13. Дифференцирование сложных функций

Рассмотрим функцию $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Здесь предполагается, что функция $f(u, v)$ определена в некоторой области D , а величины x и y изменяются так, что при этом точки (u, v) не выходят за пределы области D . В этом случае $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ есть сложная функция переменных x и y . Будем считать, что функция $z = f(u, v)$ дифференцируема по совокупности переменных u и v , а функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ дифференцируемы по каждому из своих аргументов. При этих условиях найдём $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Придадим величине x приращение Δx . Тогда u и v получают приращение $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$, а значит и $z = f(u, v)$, на основании (9.19), получит приращение, равное

$$\Delta_x z = \frac{\partial f}{\partial u} \Delta_x u + \frac{\partial f}{\partial v} \Delta_x v + \alpha_1 \Delta_x u + \alpha_2 \Delta_x v.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha_1 \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \alpha_2 \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \rightarrow 0$, то $\alpha_1 \rightarrow 0$ и $\alpha_2 \rightarrow 0$ а поэтому в пределе получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (9.25)$$

Совершенно аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (9.26)$$

Пример 9.25. Пусть $z = u + v^2$, где $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot 2x + 2v \frac{1}{x+y} = 2 \left[x + \frac{\ln(x+y)}{x+y} \right];$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 1 \cdot \cos y + 2v \cdot \frac{1}{x+y} = \cos y + \frac{2 \ln(x+y)}{x+y}.$$

Формулы (9.25) и (9.26) легко распространяются на случай любого числа промежуточных аргументов и любого числа аргументов промежуточных аргументов. Пусть, например, $z = f(u, v, w)$, где $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, $w = \chi(x, y)$. Тогда, очевидно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Пусть теперь $w = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y, z)$, $v = \psi(x, y, z)$. Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Пусть $z = f(x, u, v)$, где x – независимая переменная, а $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. Тогда z в конечном счёте есть функция одной переменной x , и

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Величину $\frac{dz}{dx}$, в отличие от частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$, называют полной производной. При её вычислении величины u и v считаются не постоянными (как при вычислении $\frac{\partial z}{\partial x}$), а функциями аргумента x .

Если аргумент x в функции z явно не содержится, а входит в неё лишь через u и v , т. е. если $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$, то $\frac{\partial z}{\partial x} \equiv 0$ и

формула для полной производной примет вид:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}. \quad (9.27)$$

Пусть теперь функция $z = f(x, y)$ задана неявно при помощи уравнения

$$F(x, y, z) = 0.$$

Дифференцируя это равенство по x как тождество, получим

$$F'_x + F'_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} \quad (9.28)$$

и аналогично

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \quad (9.29)$$

Итак, при дифференцировании неявных функций можно поступать и не непосредственно (см. пример 9.18), а сразу пользоваться «готовыми» формулами (9.28) и (9.29).

14. Инвариантность формы полного дифференциала

Рассмотрим для определённости случай, когда $z = f(u, v)$, где $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Тогда полный дифференциал функции $z = f[\varphi(x, y), \psi(x, y)]$ равен, в силу формул (9.25) и (9.26),

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy = \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right), \end{aligned}$$

т. е., на основании формулы (9.22),

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Итак, дифференциал сложной функции выглядит так же, как если бы u и v были независимыми переменными. Иными словами, мы доказали сейчас инвариантность формы (см. главу IV) полного дифференциала функции многих переменных.

Пример 9.26. Пусть функция $z = f(x, y)$ задана уравнением

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1. \quad (9.30)$$

Найдём её полный дифференциал.

В силу свойства инвариантности, полный дифференциал левой части уравнения находится так, как если бы величина z была независимой переменной, а не функцией переменных x и y . Поэтому, взяв полный дифференциал обеих частей уравнения (9.30), получим

$$-2 \cos x \cdot \sin x dx - 2 \cos y \cdot \sin y dy - 2 \cos z \cdot \sin z dz = 0,$$

т. е.

$$\sin 2x dx + \sin 2y dy + \sin 2z dz = 0,$$

откуда

$$dz = -\frac{\sin 2x}{\sin 2z} dx - \frac{\sin 2y}{\sin 2z} dy.$$

Отсюда, между прочим, следует, что $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin 2x}{\sin 2z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sin 2y}{\sin 2z}$.

Применяя эти же рассуждения к уравнению общего вида

$F(x, y, z) = 0$, ещё раз получим формулы (9.28) и (9.29).

15. Однородные функции. Тождество Эйлера

Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется однородной функцией k -й степени, если для неё выполняется тождество

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (9.31)$$

При этом число k может быть любым вещественным числом (не обязательно целым и не обязательно положительным).

Пример 9.27. Функция $z = 2x^2 + 3xy + \frac{y^3}{x}$ есть однородная функция 2-й степени.

Пример 9.28. Функция $z = x^2 y + \sqrt{x^6 - y^6} \ln \frac{y}{x}$ является однородной функцией 3-й степени.

Пример 9.29. Функция $u = \sqrt[3]{x + 2y + 5z}$ есть однородная функция степени $\frac{1}{3}$.

Пример 9.30. Функция $z = \frac{1}{x + 3y}$ – это однородная функция (-1) -степени.

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – однородная функция k -й степени. Поскольку t в тождестве (9.31) может быть любым, то положим $t = \frac{1}{x_1}$. Тогда получим

$$f\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right) = \frac{1}{x_1^k} f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Обозначая левую часть через $\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right)$, будем иметь

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right).$$

В частности, при $k = 0$ получаем

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \dots, \frac{x_n}{x_1}\right), \quad (9.32)$$

т. е. в этом случае функция зависит по существу не от переменной n аргументов, а от $n - 1$ отношений этих аргументов к одному из них.

Пример 9.31. Функция $z = \frac{x+y}{x-y}$ является однородной функцией 0-й степени. Равенство (9.32) для неё запишется так:

$$z = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}.$$

Возьмём теперь для простоты записи функцию двух переменных $f(x, y)$ и предположим, что она является однородной функцией k -степени, имеющей в некоторой области D непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Пусть $(x_0, y_0) \in D$ – произвольная точка. Тогда

$$f(tx_0, ty_0) = t^k f(x_0, y_0).$$

Дифференцируя это тождество по t , имеем

$$f'_x(tx_0, ty_0)x_0 + f'_y(tx_0, ty_0)y_0 = kt^{k-1}f(x_0, y_0).$$

Полагая здесь $t = 1$ и заменяя фиксированную точку (x_0, y_0) на «текущую» точку (x, y) , получим

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = kf(x, y).$$

Эту формулу называют тождеством Эйлера для однородных функций. Для однородной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ оно, очевидно, записывается так:

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Для $k = 2$ эта формула используется, в частности, в теоретической механике.

16. Частные производные высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Предположим, что $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, в свою очередь, дифференцируемы и по x , и

по y . Тогда, дифференцируя $\frac{\partial z}{\partial x}$ по x , получим производную 2-го порядка

функции $z = f(x, y)$ по переменной x . Её обозначают $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, или $f''_{xx}(x, y)$.

Дифференцируя функцию $\frac{\partial z}{\partial x}$ по переменной y , получим т.н. смешанную частную производную 2-го порядка, обозначаемую через $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, или $f''_{xy}(x, y)$. Аналогично, дифференцируя функцию $\frac{\partial z}{\partial x}$ по x и по y , получим частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (или $f''_{yx}(x, y)$) и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (или $f''_{yy}(x, y)$).

Пример 9.32. Пусть $z = x^3 y - \frac{y^2}{x}$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \frac{y^2}{x^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - \frac{2y}{x},$$

а значит

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy - \frac{2y^2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 3x^2 + \frac{2y}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3x^2 + \frac{2y}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2}{x}.$$

В частности, мы видим, что для данной функции выполняется равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

т. е. смешанная производная не зависит от порядка дифференцирования. Докажем, что этот факт имеет общий характер.

Теорема 9.8. (Шварца). Если функция $z = f(x, y)$ и её частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ непрерывны в точке (x_0, y_0) и в некоторой её окрестности, то

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}.$$

■ Для доказательства составим выражение

$$\Delta_{xy} z = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)] - [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)].$$

Положив

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

получим

$$\Delta_{xy} z = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0). \quad (9.33)$$

Поскольку $\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x, y_0)$, а функция $f'_x(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) , то и величина $\varphi'(x)$ существует в некоторой окрестности этой точки. Поэтому из равенства (9.33), в силу

теоремы Лагранжа, имеем

$$\Delta_{xy}z = \varphi'(\xi_1)\Delta x,$$

т. е.

$$\Delta_{xy}z = [f'_x(\xi_1, y_0 + \Delta y) - f'_x(\xi, y_0)]\Delta x, \quad (9.34)$$

где $\xi_1 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$.

Но функция $f'_{xy}(x, y)$ также определена в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) . Поэтому, снова применяя теорему Лагранжа, получим из равенства (9.34)

$$\Delta_{xy}z = f''_{xy}(\xi_1, \eta_1)\Delta y\Delta x,$$

где $\eta_1 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$.

Представим теперь величину $\Delta_{xy}z$ в виде

$$\Delta_{xy} = [f(x + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] - [f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)].$$

Вводя функцию

$$\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y),$$

будем иметь

$$\Delta_{xy}z = \psi(y_0 + \Delta y) - \psi(y_0)$$

или

$$\Delta_{xy}z = \psi'(\eta_2)\Delta y,$$

т. е.

$$\Delta_{xy}z = [f'_y(x_0 + \Delta x, \eta_2) - f'_y(x_0, \eta_2)]\Delta y.$$

Здесь $\eta_2 \in (y_0, y_0 + \Delta y)$.

Повторное применение теоремы Лагранжа даёт

$$\Delta_{xy}z = f''_{yx}(\xi_2, \eta_2)\Delta x\Delta y,$$

где $\xi_2 \in (x_0, x_0 + \Delta x)$.

Сравнивая оба выражения для $\Delta_{xy}z$ и сокращая на $\Delta x\Delta y$, получим

$$f''_{xy}(\xi_1, \eta_1) = f''_{yx}(\xi_2, \eta_2).$$

Отсюда в пределе при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, учитывая непрерывность смешанных производных, будем иметь

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0),$$

что и требовалось доказать. \square

Очевидно, теорема Шварца верна для функций любого числа переменных.

Аналогично вводятся частные производные 3-го порядка функции $z = f(x, y)$:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Применяя теорему Шварца к функциям $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, получим, например, что

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}.$$

Аналогичный факт верен и для частных производных ещё более высоких порядков.

17. Полные дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в некоторой области D непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Тогда (см. §11) в любой точке $(x, y) \in D$ она имеет полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

При фиксированных dx и dy и при переменных x и y величина dz есть функция величин x и y . Если функции $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ имеют непрерывные ча-

стные производные по x и по y , т. е. если частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ непрерывны в области D , то dz как функция переменных x и

y имеет полный дифференциал $d(dz)$. Он обозначается $d^2 z$ и называется полным дифференциалом 2-го порядка функции $z = f(x, y)$. Имеем

$$\begin{aligned} d^2 z &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) dy = \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Символически это записывают так:

$$d^2 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^2 z.$$

Правую часть этой формулы следует понимать как квадрат дифференциального оператора

$$\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$$

(его линейность очевидна), применённый к функции $z = f(x, y)$.

Точно так же, полагая $d^3 z = d(d^2 z)$, получим

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3,$$

т. е.

$$d^3 z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 z.$$

Методом индукции легко показать, что при любом натуральном m будет

$$d^m z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^m z.$$

Для функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ этот результат, очевидно, запишется так

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m u.$$

18. Формула Тейлора для функции многих переменных

Предположим, что в области D функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков до $(m+1)$ -го включительно. Возьмём произвольную точку $(x_0, y_0) \in D$ и рассмотрим новую точку $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ такую, чтобы отрезок прямой, соединяющей точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ полностью принадлежал области D .

Введём вспомогательную функцию $F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, определённую на отрезке $[0,1]$ и имеющую на нём, в силу сделанных предположений, непрерывные производные 1-го, 2-го, ..., $(m+1)$ -го порядков. Но тогда для этой функции на отрезке $[0,1]$ выполняется формула Тейлора в форме Маклорена (см. раздел V)

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \dots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!}t^m + \frac{F^{(m+1)}(\tau)}{(m+1)!}t^{m+1}, \quad (9.35)$$

где $\tau \in (0, 1)^*$. Полагая $t=1$, получим

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \dots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + \frac{F^{(m+1)}(\tau)}{(m+1)!}. \quad (9.36)$$

Но

$$F(0) = f(x_0, y_0).$$

Далее, на основании формулы (9.27),

$$F'(t) = f'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x + f'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta y,$$

откуда

$$F(0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right) f(x_0, y_0).$$

Аналогично

$$F''(t) = f''_{xx}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)(\Delta x)^2 + 2f''_{xy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)(\Delta y)^2$$

и т. д. В конечном счёте, будем иметь

$$F^{(m)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^m f(x_0, y_0);$$

$$F^{(m+1)}(\tau) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^{m+1} f(x_0 + \tau\Delta x, y_0 + \tau\Delta y).$$

Подставляя всё это в выражение (9.35) и полагая $\xi = x_0 + \tau\Delta x$, $\eta = y_0 + \tau\Delta y$ получим

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right) f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{m!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^m f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y \right)^{m+1} f(\xi, \eta). \quad (9.37)$$

Это и есть формула Тейлора для функции двух переменных. Она естественным образом распространяется и на случай функции n переменных.

*) Вид последнего слагаемого в правой части формулы (9.35) будет получен в разделе XVI.

19. Экстремум функции многих переменных

Пусть функция $f(M)$ определена в области $D \subset R_n$. Тогда точка $M_0 \in D$ называется точкой максимума этой функции, если существует такая окрестность $C_\varepsilon(M)$, что для всех точек $M \in C_\varepsilon(M_0) \cap D$ будет $f(M) < f(M_0)$. Если же для всех $M \in C_\varepsilon(M_0) \cap D$ будет $f(M) > f(M_0)$, то точка M_0 называется точкой минимума функции $f(M)$.

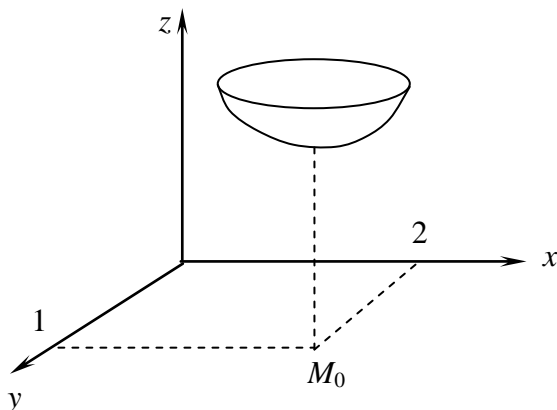


Рис. 9.22

Пример 9.33. Возьмём функцию $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 2$. Очевидно, что $z(1,2) = 2$, а во всех остальных точках $M(x, y)$ будет $z(M) > 2$. Следовательно, точка $M_0(1,2)$ является точкой минимума данной функции, рис. 9.22.

Возьмём для сокращения записей функцию двух переменных. Предположим, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция имеет, например, максимум. Тогда всюду вблизи точки (x_0, y_0) будет $f(x, y) < f(x_0, y_0)$. В частности, для всех x , близких к x_0 , будет $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ (это значит, что на прямой $y = y_0$, параллельной оси Ox функция $f(x, y)$ имеет максимум в точке $x = x_0$). В силу необходимого условия экстремума функции одной переменной, в этом случае величина $f'_x(x, y_0) \Big|_{x=x_0} = f'_x(x_0, y_0)$ либо равна нулю, либо не существует. Тот же результат получим и для $f'_y(x_0, y_0)$. Кроме того, очевидно, что это верно и для функции любого числа переменных. Таким образом, можно считать доказанным следующее утверждение.

Теорема 9.9. Если в данной точке функция n переменных имеет экстремум, то каждая из её частных производных 1-го порядка в этой точке либо обращается в нуль, либо не существует*).

Случай отсутствия частных производных в точке экстремума иллюстрируется, например, функцией $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

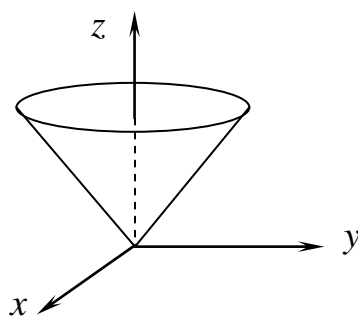


Рис. 9.23

Случай отсутствия частных производных в точке экстремума иллюстрируется, например, функцией $z = \sqrt{x^2 + y^2}$,

*) Легко представить случай, когда в точке экстремума одни частные производные обращаются в нуль, а другие – не существуют.

рис. 9.23. Имеем для неё

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

а значит в точке $(0,0)$, где функция имеет минимум, обе частные производные не существуют.

Теорема 9.9. является лишь необходимым условием существования экстремума. Действительно, пусть, например, $z = x^2 - y^2$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$,

$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$, т. е. в точке $(0,0)$ обе частные производные обращаются в нуль.

Однако, экстремума в этой точке, очевидно, нет, поскольку в любой её окрестности функция принимает как положительные, так и отрицательные значения, рис. 9.24. Точнее говоря, в точке $(0,0)$ достигается минимум функции по переменной x и максимум – по переменной y , но не достигается экстремум

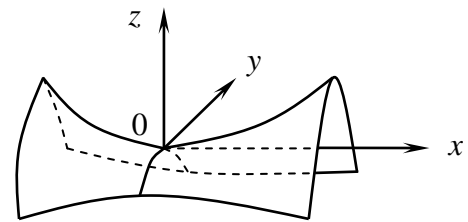


Рис. 9.24

«по совокупности» переменных x и y . Точки такого типа называют седловыми (или точками минимакса).

Исследование функции в точке, подозрительной на экстремум, производится, как и в случае функции одной переменной, по её производным 2-го порядка.

20. Необходимые сведения о квадратичных формах

Квадратичной формой называется однородная (см. §15) функция 2-й степени вида

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,k=1}^n a_{ik} x_i x_k,$$

т. е.

$$\begin{aligned} F = & a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n \\ & \text{-----} \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{9.37}$$

С квадратичной формой (9.37) можно связать матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (9.38)$$

В выражении (9.37) все числа x_1, x_2, \dots, x_n и все числа $a_{ik} (i, k = \overline{1, n})$ будем считать вещественными и кроме того, будем предполагать, что $a_{ik} = a_{ki} \forall i, k$. Таким образом, матрица (9.38) (её называют матрицей квадратичной формы (9.37)) – симметрическая.

Квадратичную форму (9.37) называют положительно определённой, если при всех x_1, x_2, \dots, x_n будет $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ причём

$$(F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 = \dots = x_n).$$

Квадратичную форму называют отрицательно определённой, если при всех x_1, x_2, \dots, x_n будет $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ причём

$$(F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0) \Leftrightarrow (x_1 = x_2 = \dots = x_n).$$

Квадратичную форму называют знакопеременной, если при одних значениях x_1, x_2, \dots, x_n будет $F(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ при других – $F(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$, а значит при третьих, в силу теоремы Больцано-Коши, – $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$. На основании матрицы (9.38) составим определители

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Здесь $\Delta_n = \text{Det}A$, а $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ называют диагональными минорами матрицы A .

В курсе линейной алгебры будет доказано следующее утверждение.

Теорема 9.9 (Сильвестра-Якоби). Для того чтобы квадратная форма (9.37) была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы определитель её матрицы и все её диагональные миноры были положительны. Для того чтобы квадратичная форма была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки определителей $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ чередовались, начиная со знака « $-$ », т. е. чтобы было

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_3 > 0, (-1)^n \Delta_n > 0.$$

21. Достаточные условия экстремума функции n переменных

Пусть $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ – стационарная точка $f(M)$ т. е. пусть

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} = 0. \quad (9.39)$$

Будем считать, что существует окрестность $C_\varepsilon(M_0)$, в которой функция $f(M)$ имеет непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков. Тогда для любой точки $M_0(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) \in C_\varepsilon(M_0)$ на основании формулы Тейлора будет

$$f(M) = f(M_0) + \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right) f(M_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^2 f(N) \quad (9.40)$$

где N – точка с координатами $\xi_i = x_i^{(0)} + \tau \Delta x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $\tau \in (0, 1)$, т. е. N – точка прямолинейного отрезка M_0M .

В силу (9.39), получим из (9.40)

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \Delta x_n \right)^2 f(N),$$

т. е.

$$f(M) = f(M_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f(N)}{\partial x_i \partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k. \quad (9.41)$$

Поскольку все частные производные $\frac{\partial}{\partial x_i \partial x_k}$ непрерывны в точке

M_0 то при всех i и k

$$\lim_{N \rightarrow M_0} \frac{\partial^2 f(N)}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_k},$$

а значит

$$\frac{\partial^2 f(N)}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_k} + \alpha_{ik},$$

где $\alpha_{ik} \rightarrow 0$, при $N \rightarrow M_0$. Поэтому равенство (9.41) принимает вид

$$F(M) = f(M_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} \Delta x_i \Delta x_k.$$

Обозначим

$$\Delta \rho = \rho(M_0, M), \quad y_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta \rho} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда получим

$$f(M) = f(M_0) + \frac{\rho^2}{2} \sum_{i,k=1}^n \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k + \frac{\Delta \rho^2}{2} \sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} y_i y_k.$$

Полагая для краткости $a_{ik} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_k}$, будем иметь окончательно

$$f(M) - f(M_0) = \frac{\rho^2}{2} \sum_{i,k=1}^n \alpha_{ik} y_i y_k + o(\Delta \rho^2). \quad (9.42)$$

Если $\Delta \rho$ мало, то знак разности $f(M) - f(M_0)$ в равенстве (9.42) определяется знаком первого слагаемого правой части, т. е. знаком выражения

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} y_i y_k, \quad (9.43)$$

которое представляет собой квадратичную форму переменных y_1, y_2, \dots, y_n . Отметим, что при этом величины y_1, y_2, \dots, y_n не могут одновременно обращаться в нуль, поскольку

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}{\Delta \rho^2}.$$

Возможны следующие случаи:

1. Квадратичная форма (9.43), порождаемая полным дифференциалом 2-го порядка функции $f(M)$ в точке M_0 положительно определённая. Тогда при всех значениях y_1, y_2, \dots, y_n будет

$$\sum_{i,k=1}^n a_{ik} y_i y_k > 0,$$

а значит, на основании (9.42), $f(M) - f(M_0) > 0$

$$f(M) > f(M_0),$$

а значит, в этом случае функция $f(M)$ имеет в точке M_0 минимум.

2. Квадратичная форма (9.43) – отрицательно определённая. Рассуждая точно так же, как и в случае 1, установим, что тогда в точке M_0 функция $f(M)$ имеет максимум.

3. Квадратичная форма (9.43) – знакопеременная. Тогда в любой окрестности точки, подозреваемой на экстремум, она принимает как положительные, так и отрицательные, значения, а значит, в этом случае, разность $f(M) - f(M_0)$ может быть как положительной, так и отрицательной. Следовательно, экстремума в точке M_0 в данном случае нет.

Из сказанного только что и из теоремы 9.9 вытекает следующее утверждение.

Теорема 9.10. Пусть M_0 является стационарной точкой функции

$f(M)$ и пусть в этой точке и в некоторой её окрестности функция $f(M)$ имеет непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков. Тогда

1. Если определитель

$$\Delta_n(M_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}^{*)}$$

и все его главные диагональные миноры $\Delta_1(M_0), \Delta_2(M_0), \dots, \Delta_{n-1}(M_0)$ – положительны, то в точке M_0 функция $f(M)$ имеет минимум;

2. Если определители $\Delta_1(M_0), \Delta_2(M_0), \dots, \Delta_2(M_0), \Delta_n(M_0)$ имеют соответственно знаки $-, +, -, +, \dots$, то в точке M_0 функция $f(M)$ имеет максимум;

3. Если $\Delta_n(M_0) \neq 0$, а числа $\Delta_1(M_0), \Delta_2(M_0), \dots, \Delta_{n-1}(M_0), \Delta_n(M_0)$ ни положительны, ни знакопеременяются по закону $-, +, -, +, \dots$, то в точке M_0 функция $f(M)$ не имеет экстремума.

Пример 9.34. Пусть в 1-м октанте ($x > 0, y > 0, z > 0$) задана функция

$$u = x + y + z + \frac{16}{xyz}.$$

Исследуем её на экстремум.

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 - \frac{16}{x^2 yz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1 - \frac{16}{xy^2 z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \frac{16}{xyz^2}.$$

Для нахождения стационарных точек полагаем $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 yz = 16, \\ xy^2 z = 16, \\ xyz^2 = 16. \end{cases} \quad (9.44)$$

*) Этот определитель называют определителем Гессе, или гессианом функции $f(M)$ в точке M_0 .

Разделив 1-е уравнение на 2-е, а затем- 2-е на 3-е, получим

$$\frac{x}{y} = 1, \frac{y}{z} = 1.$$

Итак, в области $D = \{(x, y, z) | x > 0, y > 0, z > 0\}$ система (9.44) имеет единственное решение $x = y = z = 2$, т. е. функция имеет в области D единственную стационарную точку $M_0(2,2,2)$.

Имеем, далее,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{32}{x^3 y z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{16}{x^2 y^2 z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{16}{x^2 y z^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{32}{x y^3 z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{16}{x y^2 z^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{32}{x y z^3}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} &= 1, \quad \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x \partial z} = \frac{1}{2}, \\ \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} &= 1, \quad \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial z^2} = 1. \end{aligned}$$

Составляем определители

$$\Delta_3(M_0) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

Получаем

$$\Delta_1(M_0) = 1 > 0, \quad \Delta_2(M_0) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4} > 0,$$

$$\Delta_3(M_0) = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0.$$

На основании теоремы 9.10 в точке $M_0(2,2,2)$ функция имеет минимум. При этом

$$f(M_0) = 8.$$

Примечание. Теорема 9.10 решает проблему исследования функции многих переменных на экстремум не полностью. Возможен случай, когда

$\Delta_n(M_0)=0$. В этом случае $d^2 f(M_0)=0$, и тогда равенство (9.42) имеет вид

$$f(M) - f(M_0) = o(\Delta \rho^2),$$

где правая часть включает в себя полный дифференциал функции $f(M)$ 3-го порядка, исследование которого, вообще говоря, намного сложнее. В этом случае вопрос о наличии экстремума в точке M_0 остается открытым и требует дополнительного исследования.

22. Условный экстремум функции

Рассмотренный выше экстремум функции $f(M)$ называют безусловным. Это значит, что если M_0 – точка экстремума функции, то неравенство $f(M) < f(M_0)$ (или $f(M) > f(M_0)$) выполняется для всех точек M в некоторой окрестности $C_\varepsilon(M_0)$.

Предположим теперь, что упомянутое неравенство выполняется не для всех $M \in M_0 C_\varepsilon(M_0)$, а лишь для тех, координаты x_1, x_2, \dots, x_n которых удовлетворяют некоторым условиям

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \text{-----} \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (9.45)$$

где $m < n$. Эти условия называют уравнениями связи.

Пусть R – множество точек $M \in R_n$, для которых выполняются уравнения (9.45). Если для всех точек $M \in C_\varepsilon(M_0) \cap R$ справедливо равенство $f(M) > f(M_0)$ (или $f(M) < f(M_0)$), то говорят, что функция $f(M)$ имеет в точке M_0 условный экстремум (соответственно максимум или минимум) при уравнениях связи (9.45).

Пример 9.35. Возьмём функцию $z = x^2 + y^2$. Она имеет в точке $(0,0)$ безусловный минимум, равный нулю. Найдём теперь минимум этой функции при условии $x + y - 1 = 0$. Очевидно, при этом условии будет $z_{\min} > 0$.

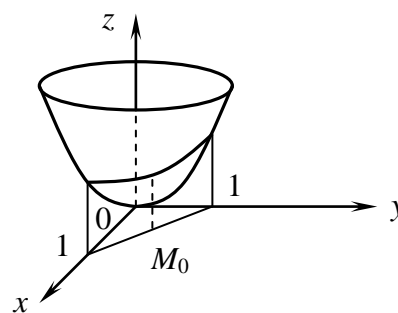


Рис. 9.25

Для нахождения точки условного минимума, рассматриваем функцию $z(x) = (x^2 + y^2)_{y=1-x}$. Она равна

$$z = x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 1.$$

Отсюда

$$\frac{dz}{dx} = 4x - 2,$$

а значит, полагая $\frac{dz}{dx} = 0$, получим искомую точку $M_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Выведем необходимые условия условного экстремума. Для определённости будем рассматривать сначала случай, когда $n = 4$, $m = 2$, т. е. рассмотрим функцию $u = f(x, y, z, t)$ с уравнениями связи

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z, t) = 0, \\ \psi(x, y, z, t) = 0. \end{cases} \quad (9.46)$$

Будем предполагать, что и функция f и функции φ и ψ имеют в рассматриваемой области непрерывные частные производные по всем своим аргументам.

Уравнения (9.46) определяют величины z и t как функции переменных x и y :

$$z = g(x, y), \quad t = h(x, y). \quad (9.47)$$

Пусть функция $f(x, y, z, t)$ при связях (9.46) имеет в точке $M_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ условный экстремум. Тогда функция $f(x, y, g(x, y), h(x, y))$ имеет в точке (x_0, y_0) безусловный экстремум. Поэтому в данной точке равны нулю обе её частные производные, а значит и полный дифференциал. В силу инвариантности полного дифференциала, последнее условие можно записать так

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (9.48)$$

Здесь все частные производные вычислены в точке M_0 , а под dz и dt подразумеваются дифференциалы функций (9.47) в точке (x_0, y_0) .

Взяв полные дифференциалы обеих частей выражений (9.46), получим

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt = 0. \end{cases} \quad \text{Будем считать, что здесь, как и в}$$

равенстве (9.48), все частные производные взяты в точке M_0 , а dz и dt —

полные дифференциалы функций $g(x, y)$ и $h(x, y)$, вычисленные в точке (x_0, y_0) .

Умножив тождества (9.49), соответственно, на числа λ и μ (пока произвольные) и сложим почленно с тождеством (9.48). Получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy + \\ & + \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t} dt + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (9.50)$$

Подберём теперь числа λ и μ так, чтобы было

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0; \end{cases}$$

это возможно, если

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial z} & \frac{\partial \psi(M_0)}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi(M_0)}{\partial t} & \frac{\partial \psi(M_0)}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (9.51)$$

При таких λ и μ получим из равенства (9.50)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) dy = 0. \quad (9.52)$$

Здесь dx и dy – произвольные приращения переменных x и y , а так как равенство (9.52) выполняется при любых dx и dy , то

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

Итак, для нахождения шести неизвестных: $x_0, y_0, z_0, t_0, \lambda$ и μ – мы имеем 6 уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial t} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \\ \varphi(x, y, z, t) = 0, \\ \psi(x, y, z, t) = 0. \end{array} \right. \quad (9.53)$$

Введём вспомогательную функцию

$$F(x, y, z, t; \lambda, \mu) = f(x, y, z, t) + \lambda \varphi(x, y, z, t) + \mu \psi(x, y, z, t).$$

Тогда система (9.53) означает, что равны нулю частные производные этой функции по каждому из 6-и её аргументов. Таким образом, нахождение точки условного экстремума функции $f(x, y, z, t)$ сводится к нахождению стационарной точки функции $F(x, y, z, t; \lambda, \mu)$.

Всё сказанное легко распространяется на случай любого числа n аргументов функции $f(M)$ и любого числа m связей. Очевидно, для функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и уравнений связи (9.45) вводится вспомогательная функция

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (9.54)$$

а поэтому вместо (9.53) будем иметь систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_{k=2}^m \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} = 0, \\ \text{-----} \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^m \lambda_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} = 0, \\ \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \text{-----} \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{array} \right. \quad (9.55)$$

Описанный метод называют методом Лагранжа, а числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – неопределёнными множителями Лагранжа.

Система (9.55) даёт лишь необходимое условие условного экстремума, т. е. из неё находится лишь точка, подозрительная на условный экстремум. Вопрос же о наличии условного экстремума в этой точке решается дополнительным исследованием. Опишем его схему.

Заметим, прежде всего, что если рассматривать лишь точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющие уравнениям (9.45) (т. е. точки $M \in R$), то функция (9.54) совпадает с функцией $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Поэтому если числа $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}; \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}$ есть решение системы (9.55) и если обозначить

$$F(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}; \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \dots, \lambda_m^{(0)}) = \Phi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

то

$$\begin{aligned} & f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \\ & = \Phi(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) - \Phi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}), \end{aligned}$$

или на основании формулы Тейлора,

$$\Delta f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) = \frac{1}{2} d^2 \Phi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + o(\Delta \rho^2). \quad (9.56)$$

Величина $d^2 \Phi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ есть квадратичная формула от переменных $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$, которые ниже мы будем обозначать dx_1, dx_2, \dots, dx_n . Эти величины независимы, поскольку, в силу (5.45),

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \Phi_1(M_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi_1(M_0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_1(M_0)}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ & \frac{\partial \Phi_2(M_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi_2(M_0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_2(M_0)}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ & \dots \\ & \frac{\partial \Phi_m(M_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi_m(M_0)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Phi_m(M_0)}{\partial x_n} dx_n = 0. \end{aligned} \right. \quad (9.57)$$

Ранг этой СЛАУ равен m , по аналогии с выражением (9.51) для случая $n = 4, m = 2$, мы молча предполагали выше, что, например,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x_{n-m+2}} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(M_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial x_{n-m+2}} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(M_0)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_m(M_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \frac{\partial \varphi_m(M_0)}{\partial x_{n-m+2}} & \dots & \frac{\partial \varphi_m(M_0)}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

а значит, она имеет $n - m$ свободных неизвестных, рис. 9.26. Поэтому из системы (9.57) можно выразить, например, $dx_{n-m+1}, dx_{n-m+2}, \dots, dx_n$ через $dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-m}$. Подставляя результат в $d^2\phi(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, получим новую квадратичную форму

$$B(dx_1, dx_2, \dots, dx_{n-m}) = \sum_{i,k=1}^{n-m} b_{ik} dx_i dx_k.$$

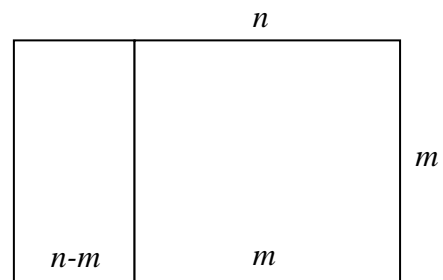


Рис. 9.26

Если она – положительно определённая, то, на основании (9.56), точка M_0 есть точка условного минимума. Если квадратичная форма B – отрицательно определённая, то в точке M_0 – условный максимум. Если же B – знакопеременная квадратичная форма, то условного экстремума в точке M_0 нет.

Пример 9.36. Исследуем функцию $u = x - 2y + 2z$ на экстремум при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Составляем функцию $F(x, y, z; \lambda) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$.

Система (9.55) в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ -2 + 2\lambda y = 0, \\ 2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9. \end{cases}$$

Имеем из неё

$$x = -\frac{1}{2\lambda}, \quad y = \frac{1}{\lambda}, \quad z = -\frac{1}{\lambda},$$

а значит

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9,$$

т. е.

$$\frac{9}{4\lambda^2} = 9,$$

откуда $4\lambda^2 = 1$, а значит $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. Итак, имеется две точки, подозрительные на условный экстремум: $M_1(-1, 2, -2)$ и $M_2(1, -2, 2)$.

Для точки M_1 получаем

$$\phi(x, y, z) = x - 2y + 2z + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 - 9).$$

Поскольку

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 1 + x, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2 + y, \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = 2 + z,$$

то

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 1,$$

а значит

$$d^2\phi(M_1) = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (9.58)$$

Но уравнение связи даёт

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

а потому в точке M_1 :

$$-dx + 2dy - 2dz = 0,$$

откуда

$$dx = 2dy - 2dz. \quad (9.59)$$

Следовательно,

$$B(dy, dz) = 4dy^2 - 8dydz + 4dz^2 + dy^2 + dz^2 = 5dy^2 - 8dydz + 5dz^2.$$

Составим определитель

$$\Delta_2(M_1) = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Поскольку $\Delta_1(M_1) = 5 > 0$, $\Delta_2(M_1) = 9 > 0$, то в точке M_1 – условный минимум, причём $u_{\min} = -9$.

Легко видеть, что в точке M_2 – условный максимум, и $u_{\max} = 9$.

Примечание. Выкладки, произведенные после равенства (9.58), в данном случае излишни, поскольку из (9.58) следует, что $d^2\phi(M_1) > 0$ при любых значениях dx , dy и dz , а не только при выполнении условия (9.59). Упомянутые же только что выкладки мы провели с целью более чёткого описания алгоритма в общем случае исследования.

Пример 9.37. Исследуем на условный экстремум функцию $u = xyz$

при условиях $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

Составляем функцию

$$F(x, y, z; \lambda, \mu) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z).$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda x + \mu, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda y + \mu, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda z + \mu.$$

Система (9.55) запишется так

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x + \mu = 0, \\ xz + 2\lambda y + \mu = 0, \\ xy + 2\lambda z + \mu = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y + z = 0. \end{cases} \quad (9.60)$$

Решая её, находим точки $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$,

$M_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, а также точки $M_4\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$,

$M_5\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $M_6\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. Остановимся на точке M_1 .

Имеем из (9.60)

$$\begin{cases} -\frac{1}{3} + \frac{2}{\sqrt{6}}\lambda + \mu = 0, \\ \frac{1}{6} - \frac{4}{\sqrt{6}}\lambda + \mu = 0, \end{cases}$$

откуда $\frac{1}{2} - \sqrt{6}\lambda = 0$, т. е. $\lambda = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, а значит

$$\mu = \frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Таким образом,

$$\phi(x, y, z) = xyz + \frac{1}{2\sqrt{6}}(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \frac{1}{6}(x + y + z),$$

так что

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = yz + \frac{x}{\sqrt{6}} + \frac{1}{6}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = xz + \frac{y}{\sqrt{6}} + \frac{1}{6}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = xy + \frac{z}{\sqrt{6}} + \frac{1}{6},$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = z, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = y, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = x, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(M_1)}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sqrt{6}}, & \frac{\partial^2 \phi(M_1)}{\partial x \partial y} &= -\frac{2}{\sqrt{6}}, & \frac{\partial^2 \phi(M_1)}{\partial x \partial z} &= \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ \frac{\partial^2 \phi(M_1)}{\partial y^2} &= \frac{1}{\sqrt{6}}, & \frac{\partial^2 \phi(M_1)}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{\sqrt{6}}, & \frac{\partial^2 \phi(M_1)}{\partial z^2} &= \frac{1}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} d^2 u(M_1) &= \frac{1}{\sqrt{6}} dx^2 + \frac{1}{\sqrt{6}} dy^2 + \frac{1}{\sqrt{6}} dz^2 - \frac{4}{\sqrt{6}} dx dy + \frac{2}{\sqrt{6}} dx dz + \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{6}} dy dz. \end{aligned} \quad (9.61)$$

Далее уравнения связи дают

$$\begin{cases} 2x dx + 2y dy + 2z dz = 0, \\ dx + dy + dz = 0. \end{cases}$$

В точке M_1 эта система выглядит так

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} dx + \frac{1}{\sqrt{6}} dy - \frac{2}{\sqrt{6}} dz = 0, \\ dx + dy + dz = 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} dx + dy - 2dz = 0, \\ dx + dy + dz = 0, \end{cases}$$

откуда находим

$$dz = 0, \quad dy = -dx,$$

и из (9.61) получим $B(dx)$.

$$B(dx) = \frac{1}{\sqrt{6}} dx^2 + \frac{1}{\sqrt{6}} dx^2 + \frac{4}{\sqrt{6}} dx^2 = \sqrt{6} dx^2.$$

В данном случае $\Delta_i(M_1) = \sqrt{6} > 0$, а значит в точке M_1 – условный минимум, причем, как легко видеть, $u(M_1) = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$. Такой же результат будем иметь и в точках M_2 и M_3 , в точках же M_4 , M_5 и M_6 легко получим условный максимум.

Примечание. С теорией экстремумов тесно связан вопрос о наибольшем и наименьшем значениях функции $f(M)$ на компакте R . Найдем значения $f(M)$ во всех точках условного максимума, лежащих внутри R ,

а также во всех точках условного максимума, лежащих на ∂R . Наибольшее из этих чисел и есть, очевидно, $\max_R f(M)$. Аналогично, $\min_R f(M)$ есть наименьший из минимумов функции внутри R и условных минимумов на ∂R .

23. Касательная и нормальная плоскость пространственной линии

Заметим, прежде всего, что линию в пространстве можно задать двумя способами.

1⁰. В параметрической форме линия задается уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \quad (9.62)$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ – функции, непрерывные в рассматриваемом (конечном или бесконечном) промежутке изменения параметра t .

Например, уравнения

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases}$$

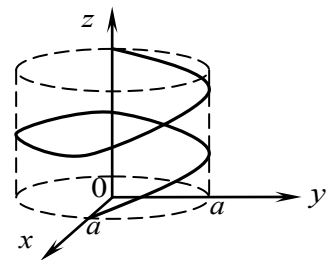


Рис. 9.27

изображают так называемую винтовую линию, лежащую на цилиндре $x^2 + y^2 = a^2$, рис. 9.27.

Очевидно, что три скалярных уравнения (9.62) эквивалентны одному векторному уравнению

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

где $\vec{r}(t)$ – известная вектор-функция.

2⁰. Линию в пространстве можно задать и как результат пересечения некоторых двух поверхностей, т. е. системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (9.63)$$

Например, уравнения

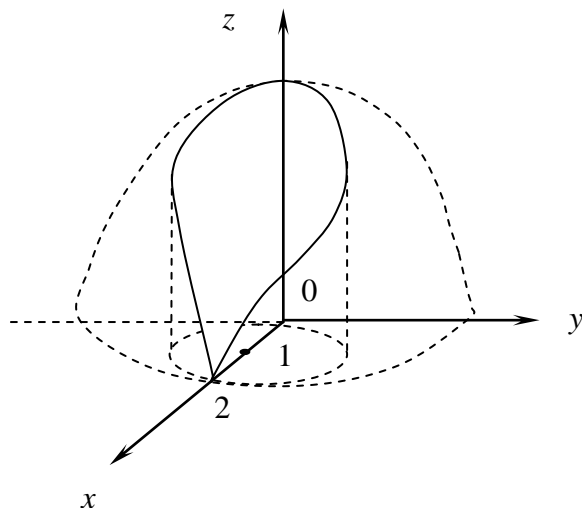


Рис. 9.28

$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

изображают (см. рис. 9.28) линию пересечения верхней полусферы и кругового цилиндра.

Примечание. В ряде случаев можно, положив в уравнениях (9.63), например, $z = t$, найти из них $x(t)$ и $y(t)$. Тем самым будет сделан переход от системы (9.63) к параметрическому заданию линии.

Пусть некоторая кривая задана уравнениями (9.62). Возьмем на ней точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, рис. 9.29, отвечающую значению $t = t_0$. Будем считать функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ дифференцируемыми в точке t_0 .

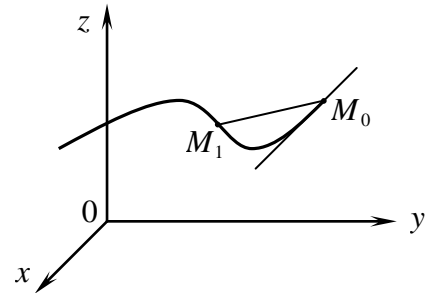


Рис. 9.29

Придадим параметру t приращение Δt ; тогда получим близкую к точке M_0 точку $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ этой же кривой. Уравнение секущей M_0M_1 :

$$\frac{x - x_0}{\Delta x} = \frac{y - y_0}{\Delta y} = \frac{z - z_0}{\Delta z}.$$

Перепишем их так:

$$\frac{x - x_0}{\Delta t} = \frac{y - y_0}{\Delta t} = \frac{z - z_0}{\Delta t}.$$

Пусть теперь $\Delta t \rightarrow 0$. Тогда точка M , неограниченно приближается к точке M_0 , и в пределе получим из последнего выражения уравнения касательной к кривой в точке M_0 :

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\chi'(t_0)}.$$

Направляющий вектор $\vec{t} = \varphi'(t_0)\vec{i} + \psi'(t_0)\vec{j} + \chi'(t_0)\vec{k}$ этой касательной называют просто вектором касательной данной кривой в точке M_0 .

Пример 9.38. Возьмем винтовую линию

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \\ z = 3t, \end{cases}$$

и точку $(1, \sqrt{3}, \pi)$ на ней. Этой точке отвечает значение $t = \frac{\pi}{3}$. Поэтому из

равенств

$$x'(t) = -2 \sin t, \quad y'(t) = 2 \cos t, \quad z'(t) = 3$$

получаем для касательной в точке $(1, \sqrt{3}, \pi)$ следующие уравнения

$$\frac{x-1}{\sqrt{3}} = \frac{y-\sqrt{3}}{1} = \frac{z-\pi}{3}.$$

Плоскость, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной к кривой в этой точке, называется нормальной плоскостью данной кривой в этой точке. Очевидно, ее уравнение:

$$\varphi'(t_0)(x-x_0) + \psi'(t_0)(y-y_0) + \chi'(t_0)(z-z_0) = 0.$$

24. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Возьмем некоторую поверхность $F(x, y, z) = 0$ и на ней точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Проведем через эту точку множество всевозможных линий, лежащих на этой поверхности. Пусть

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases} \quad (9.64)$$

уравнения одной из этих линий, а t_0 — значение параметра t , отвечающее точке M_0 , рис. 9.31. Пусть функция

$F(x, y, z)$ имеет в точке M_0 непрерывные частные производные, а функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ будут дифференцируемы в точке t_0 .

Поскольку линия (9.64) лежит на поверхности, то $F[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \equiv 0$. Взяв полную производную по t от обеих частей этого тождества, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} \varphi'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \psi'(t) + \frac{\partial F}{\partial z} \chi'(t) \equiv 0. \quad (9.65)$$

Положим здесь $t = t_0$, тогда $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Введем в рассмотрение векторы

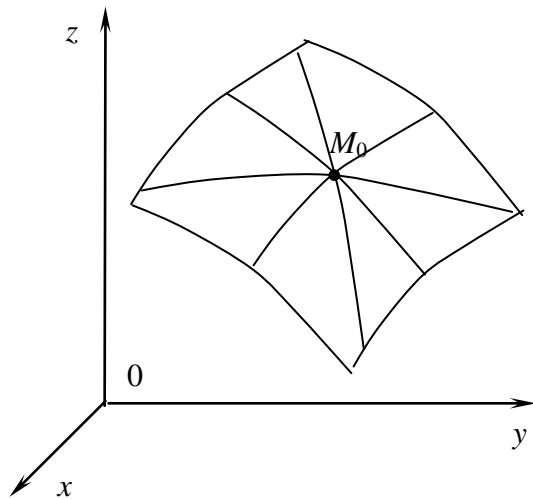


Рис.9.31

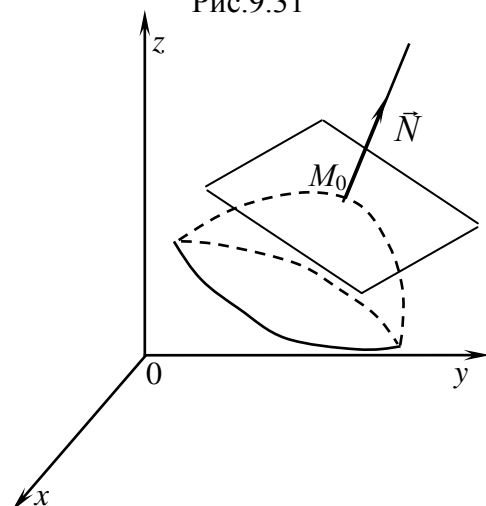


Рис 9.32

$$\vec{a} = \varphi'(t_0)\vec{i} + \psi'(t_0)\vec{j} + \chi'(t_0)\vec{k} \text{ и}$$

$$\vec{N} = F'_x(x_0, y_0, z_0)\vec{i} + F'_y(x_0, y_0, z_0)\vec{j} + F'_z(x_0, y_0, z_0)\vec{k}.$$

Тогда выражение (9.65) примет вид $(\vec{N}, \vec{a}) = 0$; а значит, $\vec{a} \perp \vec{N}$. Взяв различные кривые на поверхности, мы будем иметь разные векторы \vec{a} , но вектор \vec{N} при этом будет оставаться одним и тем же. Итак, касательные ко всем рассматриваемым кривым перпендикулярны одному и тому же вектору \vec{N} , а значит, все эти касательные лежат в одной плоскости. Ее называют касательной плоскостью данной поверхности в точке M_0 . Поскольку вектор \vec{N} есть нормальный вектор этой плоскости, то ее уравнение запишется так:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной плоскости, называется нормалью данной поверхности в этой точке. Очевидно, ее канонические уравнения:

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Пусть теперь поверхность задана явно уравнением

$$z = f(x, y).$$

Перепишем это уравнение так:

$$f(x, y) - z = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -1,$$

и уравнение касательной плоскости примет вид:

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

т. е.

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Примечание. Пусть кривая задана уравнениями (9.63), и требуется получить уравнения касательной к ней в точке M_0 . Для этого достаточно провести в точке M_0 касательные плоскости к поверхностям $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$. Линия их пересечения, очевидно, и будет искомой касательной.

Пример 9.39. К линии

$$\begin{cases} xyz = 6, \\ x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 31, \end{cases}$$

проведем касательную в точке $M_0(1, 2, 3)$.

Согласно (9.65) уравнение касательной плоскости к 1-ой поверхности

$$6(x-1)+3(y-2)+2(z-3)=0,$$

т. е.

$$6x+3y+2z-18=0.$$

Ее нормальный вектор

$$\vec{N}_1 = \{6,3,2\}.$$

Уравнение касательной плоскости ко 2-й поверхности:

$$2(x-1)+12(y-2)+12(z-3)=0,$$

т. е.

$$x+6y+6z-31=0,$$

и получаем 2-й нормальный вектор

$$\vec{N}_2 = \{1,6,6\}.$$

Следовательно, направляющий вектор касательной

$$\vec{\tau} = [\vec{N}_2, \vec{N}_1] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \{-6, 34, -33\}.$$

Искомые уравнения:

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{-34} = \frac{z-3}{33}.$$

25. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных

Проведем к поверхности $z = f(x, y)$ касательную плоскость в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Ее уравнение:

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \quad (9.66)$$

Возьмем на этой плоскости точку $M(x, y, z)$, близкую к точке M_0 и обозначим

$$x - x_0 = \Delta x, \quad y - y_0 = \Delta y, \quad z - z_0 = \Delta z.$$

Тогда равенство (9.66) примет вид

$$\Delta z = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y.$$

Справа стоит полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) . Следова-

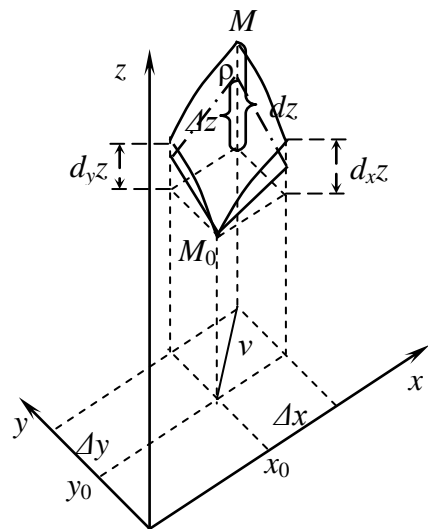


Рис.9.33

тельно, полный дифференциал функции двух переменных геометрически представляет собой приращение аппликаты точки касательной плоскости к графику этой функции в данной точке (ср. с геометрическим смыслом дифференциала функции одной переменной). Если $v \rightarrow 0$, то отрезок PM между поверхностью и касательной плоскостью, как было доказано, есть $o(v)$.

26. Огибающая однопараметрического семейства плоских линий

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y, C) = 0, \quad (9.67)$$

где C – произвольная постоянная. Придавая величине C конкретные значения, будем получать из уравнения (9.67) разные кривые одного и того же типа. Поэтому говорят, что уравнение (9.67) изображает семейство линий. Величину C называют параметром семейства. Например, уравнение $y = Cx^2$ изображает семейство парабол, осью которых является ось Oy , рис. 9.34.

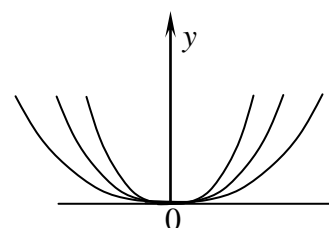


Рис. 9.34

Уравнение $y = C^2 x^2$ также определяет семейство парабол с общей осью Ox , но их ветви направлены только вверх, рис. 9.35. Сама же ось Ox входит, очевидно, в оба семейства (ей отвечает значение $C = 0$).

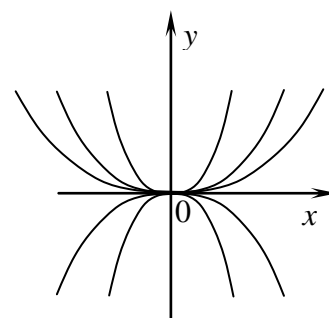


Рис. 9.35

Уравнение $(x - C)^2 + y^2 = C^2$ изображает семейство окружностей, касающихся оси Oy в начале координат, рис. 9.36.

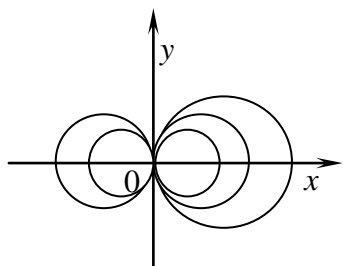


Рис. 9.36

9.36.

Огибающей данного семейства линий называется такая линия, которая в каждой своей точке касается одной и только одной линии семейства и, тем самым, вся состоит из точек касания, рис. 9.37. Например, эволюта кривой есть огибающая семейства всех нормалей этой линии (см. раздел V).

Предположим, что семейство (9.67) имеет огибающую. Покажем как найти ее уравнение. Пусть (x, y) – произвольная точка огибающей.

Через нее проходит некоторая линия семейства, отвечающая некоторому значению C , т. е. при этих x, y и C будет $F(x, y, C) = 0$. Взяв другую точку на огибающей, получим другую линию семейства, т. е. линию, отвечающую другому значению C , а значит, для

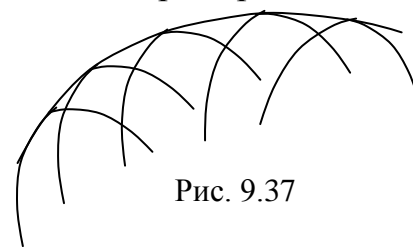


Рис. 9.37

новых значений x, y и C снова будет $F(x, y, C) = 0$ и т. д. Таким образом, для любой точки (x, y) на огибающей выполняется равенство

$$F(x, y, C(x, y)) = 0. \quad (9.68)$$

Если бы функция $C(x, y)$ была известна, то было бы известно и уравнение огибающей.

Взяв дифференциал от обеих частей тождества (9.68) и пользуясь инвариантностью полного дифференциала, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial C} dC = 0. \quad (9.69)$$

В то же время, поступая аналогично с равенством (9.67), будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0, \quad (9.70)$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

Но $\frac{dy}{dx}$ есть угловой коэффициент касательной к линии семейства. По-

скольку в каждой точке (x, y) огибающей касательные к огибающей и к соответствующей кривой семейства совпадают, то величина $\frac{dy}{dx}$, найденная

из равенства (9.69), должна совпадать с величиной $\frac{dy}{dx}$, найденной из ра-

венства (9.70), а для этого должно быть

$$\frac{\partial F}{\partial C} dC = 0.$$

При этом $dC \neq 0$, так как в противном случае было бы $C = const$ для всех точек (x, y) на огибающей. Следовательно, $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$. Поскольку вели-

чина F есть функция от x, y и C , то и $\frac{\partial F}{\partial C}$, вообще говоря, есть функция переменных x, y и C , которую затем следует подставить в (9.68).

Итак, уравнение огибающей семейства (9.87) (если оно существует) находится путем исключения C из равенств

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0, \\ \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0. \end{cases} \quad (9.71)$$

Пример 9.40. Возьмем семейство парабол $y = Cx^2 + \frac{1}{C}$. Система (9.71) для него запишется так:

$$\begin{cases} Cx^2 + \frac{1}{C} - y = 0, \\ x^2 - \frac{1}{C^2} = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение дает

$$C = \pm \frac{1}{x},$$

а значит уравнение огибающей:

$$\pm \frac{1}{x} x^2 \pm x - y = 0,$$

т. е.

$$\pm(x + x) - y = 0.$$

Итак, огибающая здесь представляет собой пару прямых $y = 2x$ и $y = -2x$, рис. 9.38.

Примечание. Линия, найденная из системы (9.71), может и не быть огибающей. Она может представлять собой геометрическое место т. н. особых точек линий (9.67) (например, точек возврата или угловых точек), см. рис. 9.39. Действительно, точка пересечения P двух “близких” кривых семейства находится из системы

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0, \\ F(x, y, C + \Delta C) = 0, \end{cases}$$

которую можно переписать так

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0, \\ F(x, y, C + \Delta C) - F(x, y, C) = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0, \\ \frac{F(x, y, C + \Delta C) - F(x, y, C)}{\Delta C} = 0. \end{cases}$$

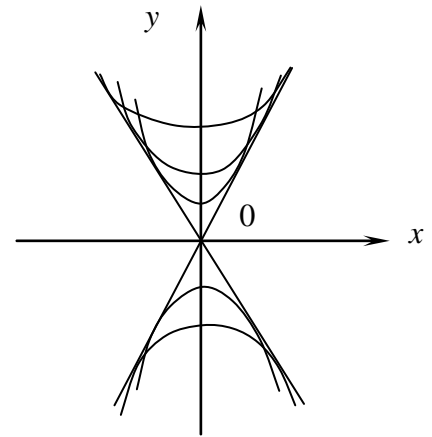


Рис. 9.38

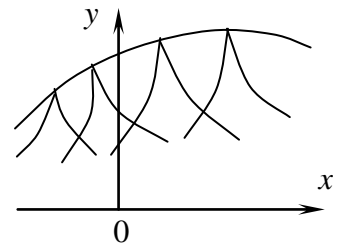


Рис. 9.39

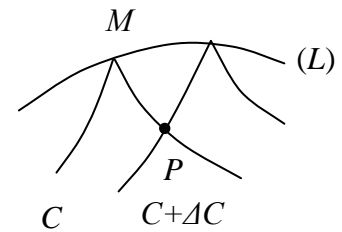


Рис. 9.40

Если $\Delta C \rightarrow 0$, то точка P неограниченно приближается к точке M , и в пределе получим, что координаты любой точки M на кривой (L) удовлетворяют системе (9.71).

Итак, исключив C из системы (9.71) необходимо еще вычислить, является ли найденная линия огибающей. Обычно это делается на основании геометрических соображений.

Задачи и упражнения к главе IX

1. Найти область определения функции

$$z = \arcsin \frac{y}{x} + \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}.$$

2. Заменяя приращение функции ее полным дифференциалом, вычислить приближенно

$$3. \ln(1,05^2 + 0,93^3 - 1).$$

4. То же для $\sqrt{1,08^2 + 1,95^3}$.

5. То же для $\sqrt[3]{2,96^2 - 1,06^3}$.

6. При изменении треугольника получены следующие данные: стороны $a = 1m \pm 0,02m$; $b = 2m \pm 0,03m$; угол между ними $\varphi = 60^\circ \pm 1^\circ$. С какой точностью может быть вычислена третья сторона?

7. Используя формулу Тейлора 2-го порядка для функции $z = x^3 y^2 + 3xy^4$, вычислить приближенно $z(2,1;0,95)$.

8. То же для $e^{0,1} \ln 1,2$.

9. Исследовать на экстремум функцию $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$.

10. То же для функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

11. Исследовать на экстремум функцию $u = x^2 + y^2 + z^2$, при условии $x + y + z = 1$.

12. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$, в области $\{(x, y) | 0 \leq x \leq 2; -1 \leq y \leq 2\}$.

13. На параболе $y = 1 - x^2$ найти точку, ближайшую к прямой $x + y = 2$.

14. На параболe $y^2 = 8(x + 2)$ найти точку, наименее удаленную от прямой $2x - y + 8 = 0$.

15. На поверхности $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ найти точку, касательная плоскость в которой образует одинаковые углы с координатными осями.

16. Доказать, что сумма квадратов отрезка, отсеченных на осях координат плоскостью, касательной к поверхности $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{2}{3}}$ в любой ее точке, равна d^2 .

17. К поверхности $2x^2 + y^2 + z^2 = 22$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $x - y - 2z = 0$.

18. К поверхности $z = xy$ провести касательную плоскость, перпендикулярную прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$.

19. К линии $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x + 2 = 5 \end{cases}$ провести касательную в точке $(2, 2\sqrt{3}, 3)$.

20. К поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 12$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $6x + 3y + 2z - 7 = 0$.

21. К поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 8$ провести касательную плоскость, параллельную прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}$.

22. К поверхности $xz + yz + xy = 5$ провести касательную плоскость, параллельную плоскости $3x + 2y + 3z = 0$.

23. Найти огибающую семейства окружностей с центрами на оси Ox , радиусы которых служат ординаты точек линии $y^2 = 4x$.

24. Найти огибающую семейства эллипсов $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, произведение полуосей которых есть постоянная величина l .

25. Найти огибающую семейства окружностей с центрами на оси Ox , радиусами которых служат ординаты точек прямой $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$.

X. Кратные интегралы

1. Некоторые задачи, приводящие к понятию двойного интеграла

1. Вычисление массы неоднородной пластинки. Пусть пластинка занимает область \bar{D} в плоскости xOy и пусть $\rho(x, y)$ – ее плотность. Разделим эту пластинку на n произвольных частей $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$ и их площади обозначим $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. В каждой из областей ΔD_k возьмем произвольную точку (x_k, y_k) , вычислим $\rho(x_k, y_k)$ и умножим результат на ΔS_k . Величина $\Delta m_k = \rho(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k$ приближенно равна массе элементарной площадки ΔD_k . Составим сумму $\tilde{m} = \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k) \Delta S_k$, величина которой равна массе всей пластинки в том случае, если ее плотность изменяется не плавно, а скачками – при переходе от одной области ΔD_k к другой.

Пусть λ_k – диаметр^{*)} области ΔD_k и пусть $\lambda = \max \lambda_k$. Предположим, что $\lambda \rightarrow 0$. Это значит, что каждая из областей ΔD_k стягивается в соответствующую точку (x_k, y_k) (при этом их число n , разумеется, неограниченно растет). Искомая масса пластинки, очевидно, равна

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k) \Delta S_k. \quad (10.1)$$

2. Вычисление потока жидкости через сечение трубы. Пусть поперечное сечение трубы занимает область D в y плоскости xOy (см. рис. 10.1), а $v(x, y)$ – скорость жидкости, протекающей через сечение D за единицу времени (его называют потоком жидкости через это сечение).

Разбиваем, как в задаче 1, область D на n частей ΔD_k с площадями ΔS_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Поток жидкости через область ΔD_k приближенно равен

$$\Delta Q_k = v(x_k, y_k) \Delta S_k,$$

где (x_k, y_k) – произвольная точка области ΔD_k . Если бы величина $v(x, y)$ изменялась не плавно, а скачками – при переходе через границы соседних областей ΔD_k , то поток через сечение D был бы равен

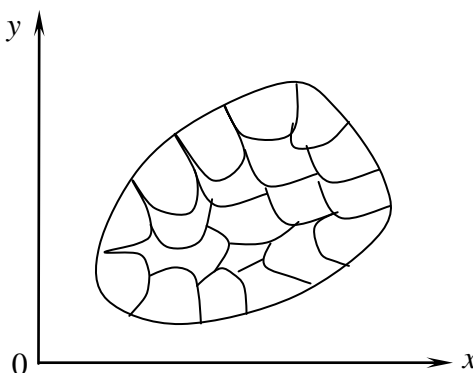


Рис. 10.1

^{*)} Диаметр любой области D называют величину $\sup(M', M'')$, где $M', M'' \in D$.

$$\tilde{Q} = \sum_{k=1}^n v(x_k, y_k) \Delta S_k.$$

Пусть теперь каждая из областей ΔD_k стягивается в точку. Тогда для искомого потока получим

$$Q = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n v(x_k, y_k) \Delta S_k,$$

где λ – наибольший из диаметров областей $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$.

2. Двойной интеграл и его геометрический смысл

Пусть D – произвольная ограниченная область в плоскости xOy , а \bar{D} – её замыкание. Предположим, что в области \bar{D} задана функция $f(x, y)$. Разобьём эту область на n частей $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$ с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$. На каждой из площадок ΔD_k возьмем произвольную точку (x_k, y_k) , вычислим $f(x_k, y_k)$ и умножим результат на ΔS_k . Составим сумму

$$\tilde{S} = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k,$$

которая называется интегральной суммой функции $f(x_k, y_k)$ в области D .

Пусть λ – наибольший из диаметров областей ΔD_k . Предположим, что $\lambda \rightarrow 0$, то есть что каждая из областей ΔD_k стягивается в точку (x_k, y_k) . Если существует предел $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \tilde{S}_\lambda$, не зависящий от способа дробления области \bar{D} , то он называется двойным интегралом функции $f(x, y)$ в области D и обозначается $\iint_D f(x, y) ds$.

Итак, по определению

$$\iint_D f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k. \quad (10.2)$$

В частности, формулу (10.1) можно теперь переписать так

$$m = \iint_D \rho(x, y) ds. \quad (10.3)$$

Функция, для которой существует интеграл $\iint_D f(x, y) ds$, называется интегрируемой в области D . Очевидно, что ограниченность функции в области D является необходимым условием интегрируемости этой функции в дан-

ной области.

Предположим для определенности, что функция $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна в области \bar{D} . Тогда $f(x_k, y_k)\Delta S_k$ есть объем элементарного столбика с основанием ΔD_k и высотой $f(x_k, y_k)$. Величина \tilde{S} равна, следовательно объему “ступенчатого” тела, составленного из всех таких столбиков. В пределе при $\lambda \rightarrow 0$ получим, что интеграл $\iint_D f(x, y) ds$

геометрически представляет собой объем так называемого цилиндрического тела с основанием \bar{D} , ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$.

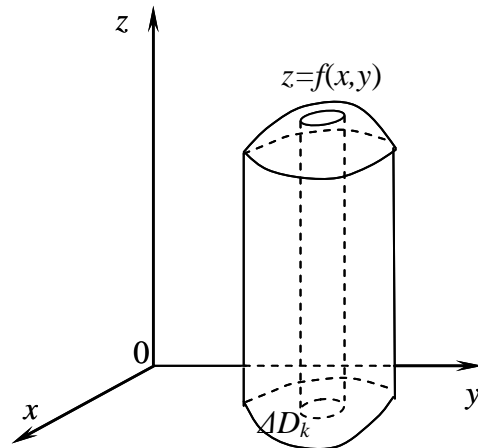


Рис.10.2

Отметим в заключение, что при фиксированных функции $f(x, y)$ и области D интеграл $\iint_D f(x, y) ds$ является

постоянным числом.

Примечание. Мы ввели представление о двойном интеграле на совершенно элементарном уровне. Такие важные здесь понятия, как площадь произвольной фигуры, объем произвольного тела (мера в случае пространства R^n) мы рассматривали как «сами собой разумеющиеся» и получали их свойства на основании соображений наглядности. Вместо этого можно было бы построить приемлемо стройную теорию мер хотя бы для $n=2$, т.е. на плоскости, чего мы не станем делать (для экономии времени) именно в угоду соображениям наглядности.

3. Основные теоремы об интегрируемости функции

Пусть функция $f(x, y)$ ограничена в области \bar{D} . Тогда она ограничена и в каждой из областей ΔD_k ($k=1, 2, \dots, n$). Обозначим $M_k = \sup f(x, y)$, $m_k = \inf f(x, y)$. Составим суммы

$$S = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta S_k, \quad s = \sum_{k=1}^n m_k \Delta S_k.$$

Они называются соответственно верхней и нижней суммой Дарбу для функции $f(x, y)$ в области D . Их свойства аналогичны свойствам сумм Дарбу для одномерного случая. Поэтому, как и для функции одной переменной, здесь имеет место

Теорема 10.1. Для того чтобы функция $f(x, y)$ была интегрируема в

области D , необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S_\lambda - s_\lambda) = 0.$$

Отсюда, в силу теоремы Кантора для функций многих переменных вытекает следующая

Теорема 10.2. Функция, непрерывная в области D , интегрируема в этой области D .

Доказательство проводится так же как и в одномерном случае. Можно доказать также, что если функция $f(x, y)$ ограничена в области \bar{D} и имеет в ней разрывы лишь на конечном числе линий с конечной длиной, то она интегрируема в области D .

4. О свойствах двойного интеграла

Ввиду полной аналогии определения интегралов $\int_a^b f(x)dx$ и

$\iint_D f(x, y)ds$ свойства двойных интегралов совершенно аналогичны свойствам определенных интегралов. Поэтому мы ограничимся лишь формулировкой части этих свойств.

1. $\iint_D ds = S$, где S – площадь области D .

Геометрический смысл этого свойства совершенно очевиден.

2. Если функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ интегрируемы в области D , а C_1 и C_2 – постоянные числа, то и функция $C_1 \cdot f(x, y) + C_2 \cdot \varphi(x, y)$ интегрируема в области D и при этом

$$\iint_D [C_1 \cdot f(x, y) + C_2 \cdot \varphi(x, y)]ds = C_1 \iint_D f(x, y)ds + C_2 \iint_D \varphi(x, y)ds.$$

3. Если функции $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ интегрируемы в области D и если $f(x, y) \geq \varphi(x, y)$ всюду в D , то и

$$\iint_D f(x, y)ds \geq \iint_D \varphi(x, y)ds.$$

В частности,

$$(f(x, y) \geq 0, (x, y) \in D) \Rightarrow \left(\iint_D f(x, y)ds \geq 0 \right).$$

4. (Аддитивность относительно области интегрирования). Если функция $f(x, y)$ интегрируема в области D , то она интегрируема и в каждой ее части, и наоборот. При этом, если $D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \emptyset$ (рис. 10.3), то

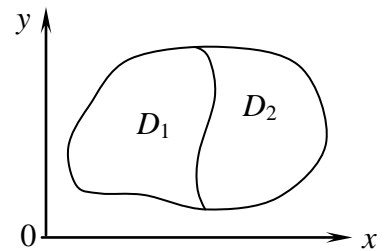


Рис.10.3

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_{D_1} f(x, y) ds + \iint_{D_2} f(x, y) ds.$$

5. (Теорема о среднем). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области \bar{D} , то существует по крайней мере одна такая точка $(\xi, \eta) \in D$, что $\iint_D f(x, y) ds = f(\xi, \eta) \cdot S$.

5. Вычисление двойного интеграла по прямоугольной области

Теорема 10.3. Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике \bar{D} , ограниченном прямыми $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ и пусть:

1) Существует двойной интеграл $\iint_D f(x, y) ds = J$;

2) При любом фиксированном $x \in [a, b]$ существует определенный интеграл

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Тогда существует и интеграл

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx,$$

и он также равен J .

■ Для доказательства разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками

x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , а промежуток $[c, d]$ — на m частей точками y_1, y_2, \dots, y_{m-1} и положим $x_0 = a$, $x_n = b$, $y_0 = c$, $y_m = d$ (рис. 10.4). Кроме того обозначим $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $y_k - y_{k-1} = \Delta y_k$. Проводя прямые $x = x_i$ ($i=1, 2, \dots, n-1$) и $y = y_k$ ($k=1, 2, \dots, m-1$), разделим прямоугольник D на mn элементарных прямоугольников. Пусть ΔD_{ik} — один из них.

Обозначим

$$m_{ik} = \inf_{\Delta D_{ik}} f(x, y), \quad M_{ik} = \sup_{\Delta D_{ik}} f(x, y)$$

Тогда для всех $(x, y) \in \Delta D_{ik}$ будет

$$m_{ik} \leq f(x, y) \leq M_{ik}.$$

В частности, при любом $x = \xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ и при любом $y \in [y_{k-1}, y_k]$ будет

$$m_{ik} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ik}.$$

Интегрируя это неравенство по y в промежутке $[y_{k-1}, y_k]$, получим

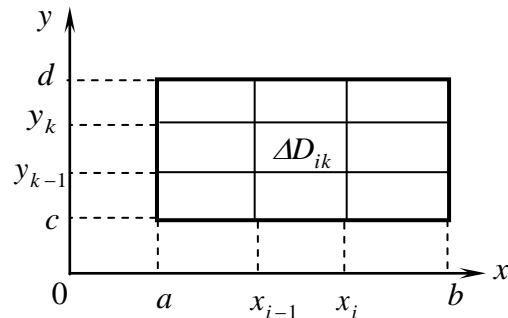


Рис.10.4

$$m_{ik} \cdot \Delta y_k \leq \int_{y_{k-1}}^{y_k} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ik} \cdot \Delta y_k. \quad (10.4)$$

Написанный здесь интеграл существует на основании условия 2) теоремы.

Суммируя неравенства (10.4) по k от 1 до m , будем иметь

$$\sum_{k=1}^m m_{ik} \cdot \Delta y_k \leq \int_c^d f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{k=1}^m M_{ik} \cdot \Delta y_k,$$

то есть

$$\sum_{k=1}^m m_{ik} \cdot \Delta y_k \leq \varphi(\xi_i) \leq \sum_{k=1}^m M_{ik} \cdot \Delta y_k.$$

Умножим это неравенство на Δx_i и просуммируем по всем $i = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Получим } \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m m_{ik} \cdot \Delta y_k \right) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^m M_{ik} \cdot \Delta y_k \right) \cdot \Delta x_i.$$

Поскольку величина $\Delta x_i \Delta y_k$ есть площадь области ΔD_{ik} , то крайние члены этого неравенства есть нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $f(x, y)$ в области D , т.е. это неравенство можно представить так

$$s \leq \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq S$$

Пусть теперь одновременно все Δx_i и Δy_k стремятся к нулю. Тогда, на основании условия 1) теоремы, будет $s \rightarrow J$, $S \rightarrow J$, а значит и

$$\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \cdot \Delta x_i \rightarrow J$$

Но пределом последней суммы есть интеграл $\int_a^b \varphi(x) dx$, следовательно,

мы доказали, что $\int_a^b \varphi(x) dx = J$, то есть что

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \iint_D f(x, y) ds.$$

В стоящем слева интеграле сначала производится интегрирование по переменной y , а затем – по переменной x . В связи с этим такой интеграл называют повторным (сравнить с понятиями двойного и повторного пределов функции $f(x, y)$ в главе IX). Поэтому, переписав последнюю формулу так

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx, \quad (10.5)$$

мы видим что двойной интеграл можно вычислить путем его сведения к повторному. □

Примечание. Если, кроме условий 1) и 2), выполняется еще условие:
3) при любом фиксированном $y \in [c, d]$ существует интеграл

$$\psi(y) = \int_a^b f(x, y) dx,$$

то тогда существует и второй повторный интеграл

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

также равный J . Следовательно, в этом случае, кроме формулы (10.5), мы имеем и другую, равносильную ей, формулу

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy. \quad (10.6)$$

Пример 10.1. Вычислим объем тела, ограниченного поверхностью $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ и плоскостями $x=0, x=2, y=0, y=1, z=a$ (рис. 10.5).

Исходя из геометрического смысла двойного интеграла, на основании формулы (10.5), имеем

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \left[\int_0^1 \frac{1}{2}(x^2 + y^2) dy \right] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^2 \cdot y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 dx = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

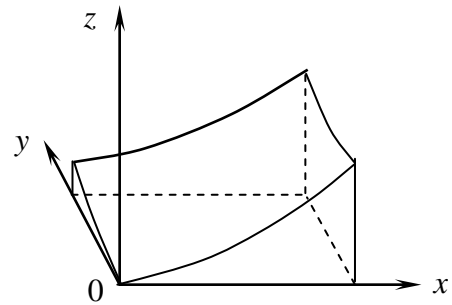


Рис. 10.5

6. Вычисление двойного интеграла в случае произвольной области

Теорема 10.4. Пусть область \bar{D} ограничена снизу и сверху линиями $y = q_1(x)$ и $y = q_2(x)$, а слева и справа – прямыми $x = a$ и $x = b$, и пусть:

1). Существует двойной интеграл $\iint_D f(x, y) ds = J$;

2). При каждом фиксированном $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$\varphi(x) = \int_{q_1(x)}^{q_2(x)} f(x, y) dy.$$

Тогда существует и интеграл

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \left[\int_{q_1(x)}^{q_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

и он также равен J .

■ Заклучим область D в прямоугольнике \overline{D}_1 , образованный прямыми $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$ (рис. 10.6). Определим в нем функцию

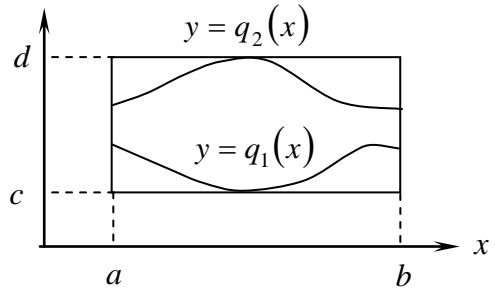


Рис. 10.6

$$f_1(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \forall (x, y) \in D, \\ 0, & \forall (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $f_1(x, y)$ интегрируема в области \overline{D}_1 , причем

$$\iint_{D_1} f_1(x, y) ds = \iint_D f(x, y) ds.$$

Далее

$$\begin{aligned} \int_c^d f_1(x, y) dy &= \int_c^{q_1(x)} f_1(x, y) dy + \int_{q_1(x)}^{q_2(x)} f_1(x, y) dy + \int_{q_2(x)}^d f_1(x, y) dy = \\ &= 0 + \int_{q_1(x)}^{q_2(x)} f_1(x, y) dy + 0 = \int_{q_1(x)}^{q_2(x)} f_1(x, y) dy, \end{aligned}$$

а значит, в силу условия 2), при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$\int_c^d f_1(x, y) dy.$$

Итак, для функции $f_1(x, y)$ выполняются условия теоремы 10.3, так что

$$\iint_{D_1} f_1(x, y) ds = \int_a^b \left[\int_c^d f_1(x, y) dy \right] dx,$$

то есть

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx, \quad (10.7)$$

что и требовалось доказать. \square

Примечание 1. Пусть область ограничена слева и справа линиями $x=h_1(y)$ и $x=h_2(y)$, а сверху и снизу – прямыми $y=c, y=d$ (рис. 10.7), и пусть:

1) существует двойной интеграл $\iint_D f(x, y)ds = J$;

2) при любом фиксированном $y \in [c, d]$ существует интеграл

$$\varphi(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx.$$

Тогда существует и интеграл

$$\int_c^d \varphi(y)dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx \right] dy,$$

также равный J , то есть в этом случае

$$\iint_D f(x, y)ds = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dx \right] dy. \quad (10.8)$$

Это утверждение доказывается точно так же, как и предыдущая теорема.

Примечание 2. Если D – область более сложной формы (рис. 10.8), чем рассматриваемая выше, то ее разбивают на конечное число областей рассмотренного вида и к каждой из них применяют либо формулу (10.7), либо формулу (10.8), после чего используют аддитивность интеграла.

Пример 10.2. Вычислим массу пластинки ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$ (рис. 10.9), если ее плотность равна $2\sqrt{x}$. На основании формул (10.3) и (10.7) имеем

$$\begin{aligned} m &= \iint_D 2 \cdot \sqrt{x} ds = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2 \cdot \sqrt{x} dy \right) dx = \\ &= 2 \int_0^1 \left(\sqrt{x} \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right) dx = 2 \int_0^1 \sqrt{x} (\sqrt{x} - x^2) dx = 2 \int_0^1 \left(x - x^{\frac{5}{2}} \right) dx = \\ &= 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{7} \cdot x^{\frac{7}{2}} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{7} \right) = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

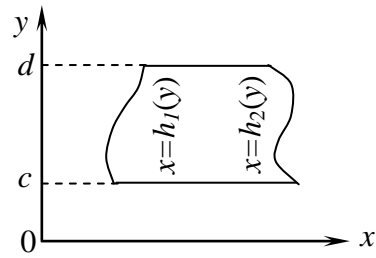


Рис.10.7

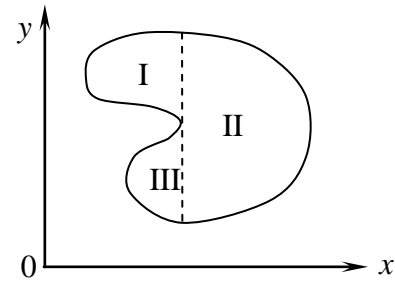


Рис. 10.8

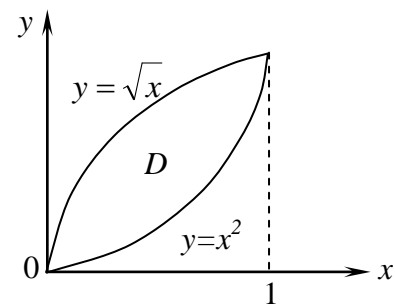


Рис. 10.9

Примечание 3. Если $f(x, y) \geq 0$ для всех $(x, y) \in D$, то формула (10.7) имеет простой геометрический смысл. Действительно, в этом случае

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

а значит, трактуя двойной интеграл как объем цилиндрического бруса (смотри главу ПV), получим

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_a^b S(x) dx,$$

то есть

$$\iint_D f(x, y) ds = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx,$$

что совпадает с формулой (10.7). Аналогичное замечание касается и формулы (10.8).

Примечание 4. В связи с формулами (10.7) и (10.8) интеграл $\iint_D f(x, y) ds$ часто обо-

значают еще $\iint_D f(x, y) dx dy$. Величину $ds = dx dy$

называют при этом элементом площади в декартовых координатах (рис. 10.11).

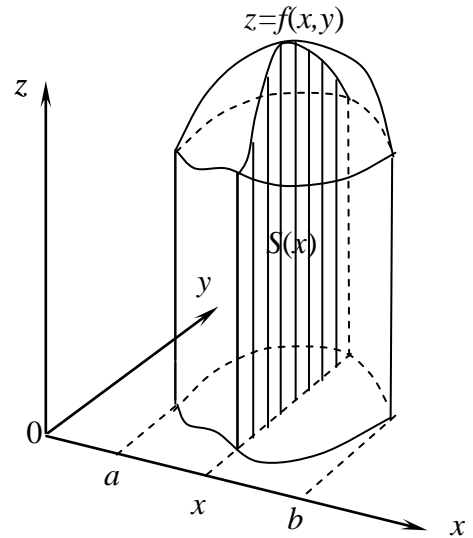


Рис.10.10

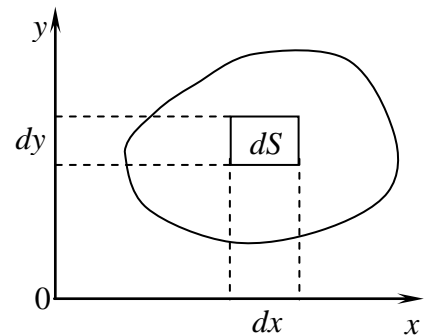


Рис.10.11

7. Вычисление площади поверхности при помощи двойного интеграла

Пусть Σ – часть поверхности $z = f(x, y)$, проектирующаяся в область \bar{D} плоскости xOy . Разобьем \bar{D} на n частей $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$ и пусть ΔS_k – площадь области ΔD_k . В каждой из областей ΔD_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$ (рис. 10.12), а на поверхности Σ – отвечающую ей точку $P_k(x_k, y_k, z_k)$. Проведем в точке P_k касательную плоскость к поверхности Σ . Пусть $\Delta \Sigma_k$ – та часть этой плоскости, которая проектируется в область ΔD_k , а $\Delta \sigma_k$ – площадь этой площадки. Составим сумму

$$\tilde{\sigma} = \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k.$$

Обозначим через λ наибольший из диаметров областей ΔD_k и предположим, что $\lambda \rightarrow 0$. Если существует предел

$$\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta\sigma_k,$$

не зависящий от способа дробления области \bar{D} , то он называется площадью поверхности Σ , а сама поверхность в этом случае называется квадратуемой.

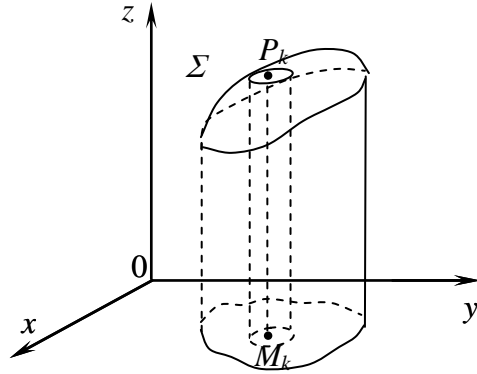


Рис.10.12

Предположим, что функция $f(x, y)$ имеет в области \bar{D} непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$. Докажем, что тогда поверхность Σ квадратуема и получим формулу для ее площади.

Уравнение касательной плоскости к поверхности Σ в точке P_k имеет (смотри главу IX) вид

$$z - z_k = \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} (x - x_k) + \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y} (y - y_k),$$

или

$$-\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} (x - x_k) - \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y} (y - y_k) + (z - z_k) = 0.$$

Следовательно, нормальный вектор этой плоскости равен

$$\vec{n}_k = -\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}. \quad (10.9)$$

Далее

$$\Delta S_k = \Delta\sigma_k \cdot \cos \gamma_k,$$

а так в силу (10.9),

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}\right]^2 + 1}},$$

то

$$\Delta\sigma_k = \Delta S_k \cdot \sqrt{\left[\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y}\right]^2 + 1}.$$

Поэтому

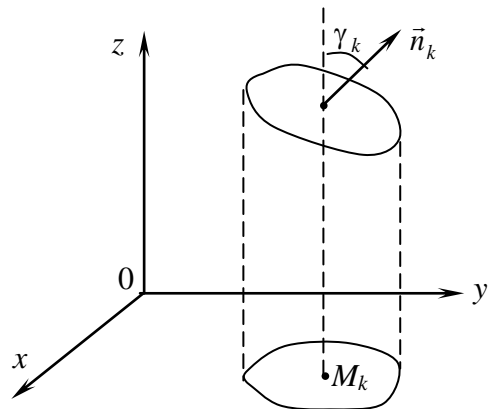


Рис. 10.13

$$\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial f(x_k, y_k)}{\partial y} \right]^2} \cdot \Delta S_k.$$

Сумма под знаком предела является интегральной суммой для функции

$\phi(x, y) = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}$ в области D . На основании сделанных пред-

положений, эта функция непрерывна в области \bar{D} , а значит окончательно

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} ds. \quad (10.10)$$

Эта формула является пространственным аналогом формулы

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

для длины дуги плоской линии.

Пример 10.3. Найти площадь части поверхности $z = 2\sqrt{x}$, вырезан-

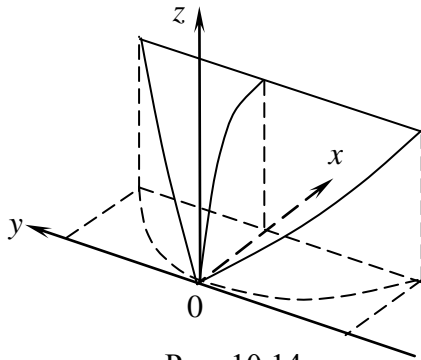


Рис. 10.14

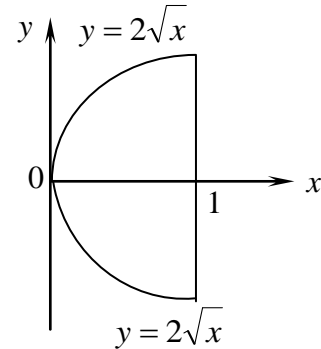


Рис. 10.15

ной поверхностью $y^2 = 4x$ и плоскостью $x = 1$ (рис. 10.14, 10.15). Имеем в

данном случае $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$, а значит формула (10.10) дает

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + \frac{1}{x}} ds = \int_0^1 \left(\int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} dy \right) dx = 4 \int_0^1 \sqrt{x+1} = \frac{8}{3} \sqrt{(x+1)^3} \Big|_0^1 = \frac{8}{3} (2\sqrt{2} - 1).$$

8. Физические приложения двойных интегралов

1. Вычисление массы однородной пластинки. Мы уже видели, что масса пластинки, занимающей область \bar{D} в плоскости xOy и имеющей плотность $\rho(x, y)$, выражается формулой (10.3).

2. Вычисление моментов инерции пластинки. Рассмотрим ту же пластинку, и пусть ΔD_k — ее элементарная часть, рис. 10.16. Момент инерции области ΔD_k относительно точки O равен приблизительно

$$(\Delta I_0)_k = r_k^2 \Delta m_k = (x_k^2 + y_k^2) \rho(x_k, y_k) \Delta S_k,$$

а значит, момент инерции всей пластинки равен

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) ds.$$

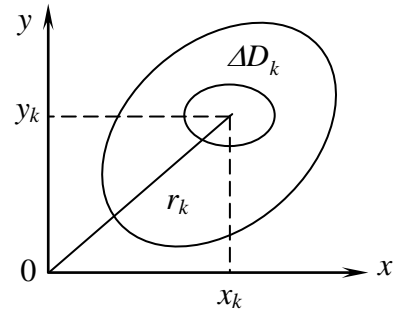


Рис. 10.16

Если пластинка однородная, то есть если $\rho(x, y) \equiv \rho \equiv const$, то

$$I_0 = \rho \iint_D (x^2 + y^2) ds.$$

Очевидно, что моменты инерции неоднородной пластины относительно осей Ox и Oy равны соответственно:

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) ds, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) ds.$$

Откуда, в частности, следует что $I_0 = I_x + I_y$

3. Нахождение центра тяжести пластинки. Разобьем пластинку на части $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$. В каждой из областей ΔD_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k)$. Рассматривая пластинку как дискретную совокупность n материальных точек M_1, M_2, \dots, M_n с массами $\Delta m_1 = \rho(x_1, y_1) \Delta s_1$, $\Delta m_2 = \rho(x_2, y_2) \Delta s_2, \dots, \Delta m_n = \rho(x_n, y_n) \Delta s_n$, получим для абсциссы центра тяжести:

$$x_c \approx \frac{\sum_{k=1}^n x_k \Delta m_k}{\sum_{k=1}^n \Delta m_k} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k \rho(x_k, y_k) \Delta s_k}{\sum_{k=1}^n \rho(x_k, y_k) \Delta s_k},$$

откуда в пределе при $\lambda \rightarrow 0$ будем иметь точную формулу

$$x_c = \frac{\iint_D x \rho(x, y) ds}{\iint_D \rho(x, y) ds},$$

и, аналогично,

$$y_c = \frac{\iint_D y\rho(x, y)ds}{\iint_D \rho(x, y)ds}.$$

Если пластинка – однородна, то, сокращая обе дроби на число ρ , получим

$$x_c = \frac{\iint_D xds}{S}, \quad y_c = \frac{\iint_D yds}{S},$$

где S – площадь пластинки.

Пример 10.4. Найдем центр тяжести однородной фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 1$ (рис. 10.16).

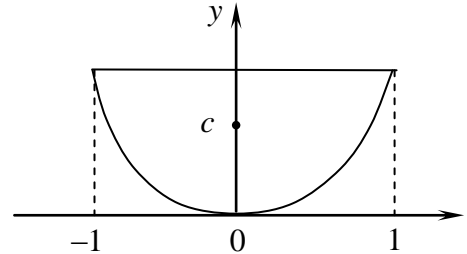


Рис. 10.16

Очевидно, что $x_c = 0$. Далее

$$\iint_D yds = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 ydy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 y^2 \Big|_{x^2}^1 dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx =$$

$$\int_0^1 (1 - x^4) dx = \left(x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5};$$

$$S = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx = 2 \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3};$$

а значит,

$$y_c = \frac{4}{5} \div \frac{4}{3} = \frac{3}{5}.$$

9. Тройной интеграл, его вычисление и применение

Изучение тройных интегралов является естественным обобщением на трёхмерный случай теории, относящейся к двойным интегралам.

Пусть функция $f(x, y, z)$ задана в ограниченной замкнутой области D пространства R_3 . Разобьем область D некоторыми поверхностями на n частей $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$ с объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. В каждой из областей ΔD_k возьмем произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и вычислим значение $f(x_k, y_k, z_k)$. Составим сумму

$$\tilde{S} = \sum f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

Она называется интегральной суммой функции $f(x, y, z)$ в области D .

Обозначим через λ наибольший из диаметров областей $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$. Пусть теперь $\lambda \rightarrow 0$; это значит, что область D подвергается неограниченному дроблению так, что каждая из областей ΔD_k стягивается в соответствующую точку M_k . Если существует предел $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\tilde{S}_\lambda)$, не зависящий от способа дробления области D , то он называется тройным интегралом функции $f(x, y, z)$ по области D и обозначается

$$\iiint_D f(x, y, z) dv.$$

Итак, по определению,

$$\iiint_D f(x, y, z) dV = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k.$$

Именно из этого определения и следует полная аналогия двойных и тройных интегралов, в частности, совпадение их свойств. Например, вместо равенства

$$\iint_D ds = S_D$$

теперь мы имеем

$$\iiint_D dV = V_D,$$

где V_D – объем области D .

Точно так же, как для определенных и двойных интегралов, можно установить, что если функция $f(x, y, z)$ непрерывна в

области D , то интеграл $\iiint_V f(x, y, z) dV$

существует.

Тройной интеграл не имеет геометрического смысла, но ему можно придать физический смысл. Пусть $f(x, y, z) \geq 0$ для всех $(x, y, z) \in D$. Тогда функцию $f(x, y, z)$ можно рассматривать как плотность вещества в области D . В этом случае величина $f(x_k, y_k, z_k) \Delta V_k$ приближенно равна массе вещества в области ΔD_k . Суммируя

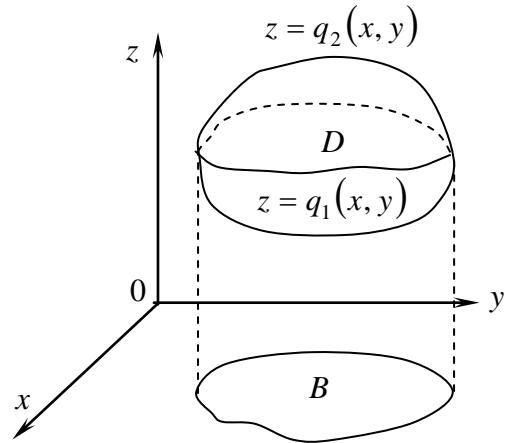


Рис. 10.17

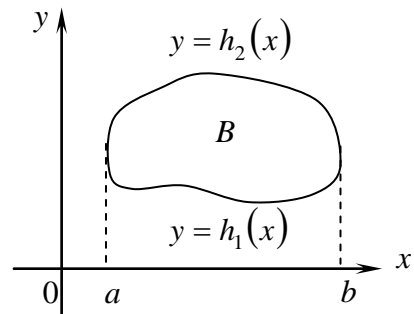


Рис. 10.18

эти массы и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим, что интеграл $\iiint_D f(x, y, z)dv$ есть масса вещества во всей области D .

Вспоминая формулу для вычисления двойного интеграла и способ её получения, нетрудно вывести и формулу для вычисления тройного интеграла. Пусть $z = g_1(x, y)$ и $z = g_2(x, y)$ – уравнения нижней и верхней границ областей D , рис 10.17. Далее, пусть B – двумерная область, полученная в результате проектирования области D на плоскость xOy , рис.10.18, а $y = h_1(x)$ и $y = h_2(x)$ *) ($a \leq x \leq b$) – уравнения нижней и верхней границ области B . Тогда, рассуждая аналогично случаю двойного интеграла, получим в конечном счете формулу, выражающую тройной интеграл через повторный:

$$\iiint_D f(x, y, z)dV = \int_a^b \left\{ \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \left[\int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z)dz \right] dy \right\} dx. \quad (10.11)$$

При этом порядок интегрирования по каждой из переменных x, y, z может быть и изменен.

Величину $dv = dxdydz$ называют элементом объема в декартовых координатах. Её вид напоминает о том, что в процессе вывода формулы (10.11) область D разбивается на элементарные прямоугольные параллелепипеды со сторонами $\Delta x_i, \Delta y_j$ и Δz_k .

Пример. 10.5. Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $x = 0, y = 0,$

$x + y = 1$ и конусами $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, если его плотность в каждой точке равна $\rho(x, y, z) = xyz$, рис. 10.19 и рис. 10.20.

На основании физического смысла тройного интеграла имеем для данного случая

$$m = \iiint_D xyzdv.$$

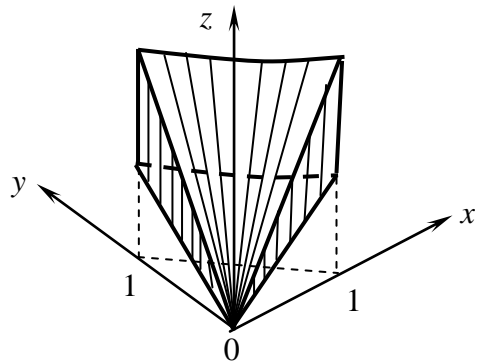


Рис. 10.19

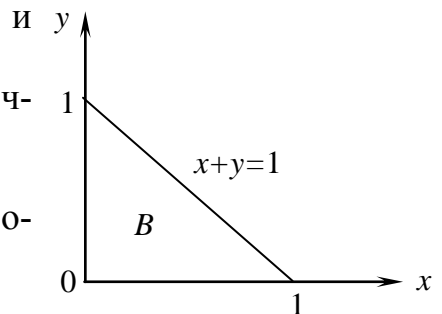


Рис. 10.20

*) Функции $g_1(x, y), g_2(x, y), h_1(x), h_2(x)$ предполагаются однозначными.

В силу формулы (10.11) получаем отсюда

$$\begin{aligned}
 m &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2\sqrt{x^2+y^2}} xyz dz \right) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x \int_0^{1-x} y \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2\sqrt{x^2+y^2}} z dz \right) dy \right] dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x \int_0^{1-x} yz^2 \Big|_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2\sqrt{x^2+y^2}} dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[x \int_0^{1-x} y3(x^2 + y^2) dy \right] dx = \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^1 \left[x \int_0^{1-x} (x^2 y + y^3) dy \right] dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x \left(\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \\
 &= \frac{3}{8} \int_0^1 x \left[2x^2(1-x)^2 + (1-x)^4 \right] dx = \\
 &= \frac{3}{8} \int_0^1 (2x^3 - 4x^4 + 2x^5 + x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5) dx = \\
 &= \frac{3}{8} \int_0^1 (8x^3 - 8x^4 + 3x^5 + x - 4x^2) dx = \\
 &= \frac{3}{8} \left(2x^4 - \frac{8}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{8} \left(2 - \frac{8}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{40}.
 \end{aligned}$$

Кроме вычисления масс неоднородных тел, тройные интегралы, очевидно, могут быть использованы для вычисления моментов инерции, нахождения центров тяжести тел (как однородных, так и неоднородных) и т. д.

Задачи и упражнения к главе X

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z = 2x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z = xy + 2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + 2y = 2$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z = x^2 + 4y^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = \frac{x}{2}$, $y = x$, $x = 1$.
4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + 2y^2$, $y = x^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 1$.

5. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z^2 = xy$ и плоскостями $x + y = 1$, $x + y = 2$, ($x > 0, y > 0, z > 0$).

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 2x^2 + y^2$, $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и плоскостями $y = 2$, $z = 0$.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = xy$, $xy = 1$, $xy = 2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 1$, $y = 2$.

8. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $y = 2x^2$ и плоскостями $z = 0$, $z = y$, $y = 2$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $2 = (y - 1)^2$ и плоскостью $z = 0$.

10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y^2 = 2x$, $z = 2xy$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, ($y \geq 0$).

11. Найти объем тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $x + y = 4$, $y = x$, $y = \frac{x}{3}$ и поверхностью $z = x^2 + 2y^2$.

12. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $y = 1$ и поверхностью $y = \ln x$.

13. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^2 + z^2 = 1$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$.

14. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = 1$ и $y = \ln x$, если ее плотность в каждой точке равна $\rho = x + y$.

15. Вычислить массу пластинки, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $y = \sqrt{x - 1}$ и $x + y = 3$, если ее плотность в каждой точке равна $\rho = xy$.

16. Найти массу пластинки, ограниченной линиями $xy = 1$, $xy = 2$, $y = 1$, $y = 2$, если ее плотность в каждой точке равна $\rho = xy$.

17. Найти центр тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$ и $xy = 2$.

18. Найти центр тяжести однородной пластинки (рис 10.21), ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 + x$ и $y = 2 - x$.

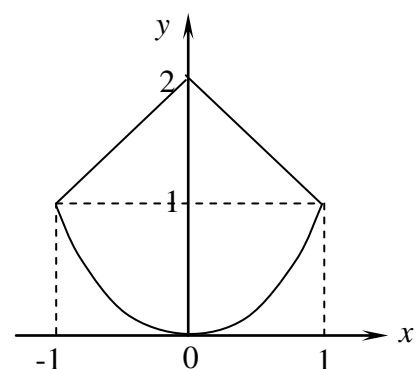


Рис.10.21

19. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$, $z = \frac{1}{2}$, $z = y$.

20. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $y = x^2$ и плоскостями $z = 0$, $z = y$, $y = 1$.

21. Найти массу тела, ограниченного поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, если его плотность в каждой точке равна z .

22. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ и плоскостями $z = 0$, $x + z = 6$, если его плотность в каждой точке равна x .

23. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $z = 0$, $y = 2$, и поверхностями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, если его плотность в каждой точке равна x^2 .

24. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $y = x^2$, $z = y^2$ и плоскостью $z = y$, если его плотность в каждой точке равна $x^2 y z$.

25. Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$ и поверхностью $z = x^2 + y^2$, если его плотность равна $\rho = x + y + z$.

26. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = 2x^2 + y^2$, $y = x^2$ и плоскостями $y = 1$, $z = 0$, если его плотность в каждой точке равна $\rho = y^2 + z$.

27. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $z = x + y$, $z = 2(x + y)$, $y = x$, $y = 2x$, $y = 2$, если его плотность равна $\rho = x + y + z$.

28. Найти момент инерции относительно оси Ox однородного тела с плотностью ρ , ограниченного поверхностью $z = y^2$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

29. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностью $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 2$.

30. Найти момент инерции тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$, $x + z = 2$ и $x + 2z = 2$, относительно начала координат.

XI. Кратные интегралы в криволинейных координатах

1. Криволинейные координаты на плоскости

Пусть в ограниченной замкнутой области \bar{D} плоскости xOy заданы непрерывные функции $u = p(x, y)$ и $v = q(x, y)$. Взяв конкретные x и y , получим конкретные u и v . Поэтому можно говорить, что каждой точке $(x, y) \in \bar{D}$ отвечает точка (u, v) некоторой другой плоскости uOv .

Пусть \bar{G} – множество точек (u, v) при условии, что точки (x, y) заполняют всю область \bar{D} . Легко видеть, что множество \bar{G} есть замкнутая область.

Будем считать, что если $(u, v) \in \bar{G}$, то система

$$\begin{cases} u = p(x, y), \\ v = q(x, y) \end{cases} \quad (11.1)$$

однозначно разрешима относительно x и y . Тогда между точками областей \bar{D} и \bar{G} имеет место взаимно однозначное соответствие, причем, очевидно, точкам $(x, y) \in \partial\bar{D}$ отвечают точки $(u, v) \in \partial\bar{G}$.

Говорят, что формулы (11.1) осуществляют отображение области \bar{D} плоскости xOy в область \bar{G} плоскости uOv . Область \bar{G} при этом называют образом области \bar{D} .

Разрешая равенства (11.1) относительно x и y , получим

$$\begin{cases} x = g(u, v), \\ y = h(u, v). \end{cases} \quad (11.2)$$

Взяв произвольные числа u и v , такие, что $(u, v) \in \bar{G}$, однозначно определим по ним некоторую точку (x, y) в области \bar{D} . Поэтому величины u и v могут играть роль координат точки (x, y) .

Геометрическое место точек $(x, y) \in \bar{D}$, для которых координата u сохраняет постоянное значение u_0 , называется координатной линией координаты u . Из уравнения (11.1) следует, что уравнение этой линии $p(x, y) = u_0$.

Придавая величине u_0 всевозможные значения, получим так называемой семейство координатных линий координаты u . Благодаря взаимной однозначности соответствия, через каждую точку $(x, y) \in \bar{D}$ проходит одна и только одна линия семейства.

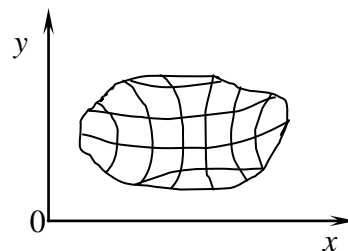


Рис. 11.1

Аналогично определяются координатные линии координаты v , также образующие семейство, рис. 11.1.

Поскольку линии обоих семейств являются, вообще говоря, кривыми, то u и v называют криволинейными координатами точки (x, y) .

Примером криволинейных координат могут служить полярные координаты. Формулы (11.2) в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (11.3)$$

Если область D не содержит начала координат, а $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, то формулы (11.3) допускают следующее однозначное разрешение относительно ρ и φ :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \end{cases}$$

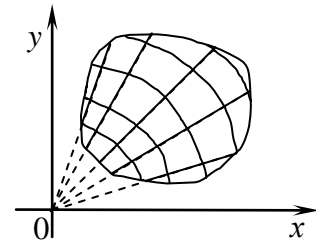


Рис. 11.2

Итак, при указанных условиях между парами чисел (x, y) и (ρ, φ) имеется взаимное однозначное соответствие. Координатными линиями координат ρ и φ являются окружности $x^2 + y^2 = const$ и лучи, выходящие из начала координат, рис. 11.2.

2. Элемент площади в криволинейных координатах

Возьмем в плоскости uOv элементарный прямоугольник с вершина-

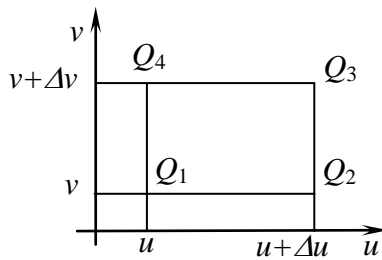


Рис. 11.3

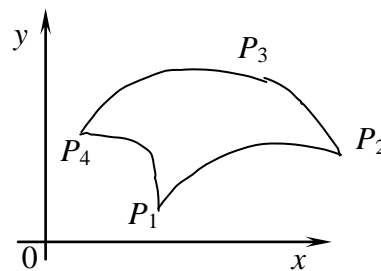


Рис. 11.4

ми $Q_1(u, v)$, $Q_2(u + \Delta u, v)$, $Q_3(u + \Delta u, v + \Delta v)$ и $Q_4(u, v + \Delta v)$, рис. 11.3. Его прообразом в плоскости xOy является некоторый криволинейный четырехугольник, образованный двумя парами координатных линий, рис. 11.4. Его вершины находятся в точках

$$P_1(g(u, v), h(u, v)), P_2(g(u + \Delta u, v), h(u + \Delta u, v)), \\ P_3(g(u + \Delta u, v + \Delta v), h(u + \Delta u, v + \Delta v)) \text{ и } P_4(g(u, v + \Delta v), h(u, v + \Delta v)).$$

Положим для краткости $\delta = \sqrt{(\Delta u)^2 + (\Delta v)^2}$. Тогда считая, что функции $g(u, v)$ и $h(x, y)$ имеют в области \bar{G} непрерывные частные производные $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$, $\frac{\partial h}{\partial u}$ и $\frac{\partial h}{\partial v}$, получим, что с точностью до величины $o(\delta)$, точки P_1, P_2, P_3 и P_4 можно заменить точками

$$\begin{aligned} & P_1'(g(u, v), h(u, v)) \\ & P_2' \left(g(u, v) + \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u, h(u, v) + \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u \right), \\ & P_3' \left(g(u, v) + \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial g}{\partial v} \Delta v, h(u, v) + \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial h}{\partial v} \Delta v \right) \text{ и} \\ & P_4' \left(g(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v} \Delta v, h(u, v) + \frac{\partial h}{\partial v} \Delta v \right)^*. \end{aligned}$$

Поскольку $\overrightarrow{P_1'P_2'} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u \right\}$ и $\overrightarrow{P_4'P_3'} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u \right\}$, то $\overrightarrow{P_4'P_3'} = \overrightarrow{P_1'P_2'}$, а значит, фигура $P_1'P_2'P_3'P_4'$ есть параллелограмм. Его площадь, следовательно, равна $\left| \left[\overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{P_2'P_3'} \right] \right|$. Но $\overrightarrow{P_2'P_3'} = \left\{ \frac{\partial g}{\partial v} \Delta v, \frac{\partial h}{\partial v} \Delta v \right\}$, а значит

$$\begin{aligned} \left| \left[\overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{P_2'P_3'} \right] \right| &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u & 0 \\ \frac{\partial g}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial h}{\partial v} \Delta v & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial g}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial h}{\partial v} \Delta v \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \vec{k}. \end{aligned}$$

Определитель

*) Здесь и ниже предполагается, что частные производные $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial h}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$ и $\frac{\partial h}{\partial v}$ вычислены в точке (u, v) .

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} \end{vmatrix}$$

называется определителем Якоби, или якобианом, функций $g(u, v)$ и $h(u, v)$ и обозначаются $\frac{\partial(g, h)}{\partial(u, v)}$.

Итак

$$\left[\overrightarrow{P_1'P_2'}, \overrightarrow{P_2'P_3'} \right] = J(u, v) \Delta u \Delta v \vec{k},$$

а значит

$$S_{P_1'P_2'P_3'P_4'} = |J(u, v)| \Delta u \Delta v.$$

Отсюда следует, что и площадь четырехугольника $P_1'P_2'P_3'P_4'$ с точностью до величины $o(\delta^2)$ равна $|J(u, v)| \Delta u \Delta v$. Поэтому в качестве элемента площади в криволинейных координатах берется величина $|J(u, v)| du dv$.

В частности, для полярных координат имеем

$$g(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi, \quad h(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi,$$

а значит

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial \rho} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial h}{\partial \rho} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho,$$

а так как всегда $\rho \geq 0$, то и элемент площади в полярных координатах равен

$$ds = \rho d\rho d\varphi.$$

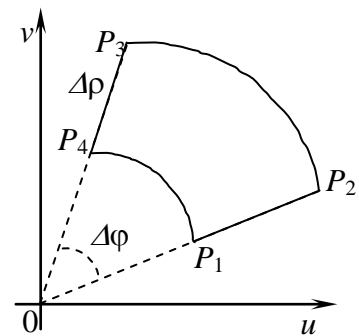


Рис. 11.5

Следовательно, с точностью до малых высшего порядка фигуру $P_1P_2P_3P_4$ можно считать прямоугольником со сторонами $P_1P_2 = \Delta \rho$ и $P_1P_4 = \rho \Delta \varphi$, рис. 11.5

3. Вычисление площади в криволинейных координатах

Пусть область \bar{G} в плоскости uOv является образом области \bar{D} в плоскости xOy . Разобьем область \bar{G} на элементарные прямоугольники прямыми $u = const$ и $v = const$. Тогда область \bar{D} разобьется координатными линиями на элементарные четырехугольники. Площадь ik -го четырехугольника равна $|J(u_i, v_k)| \Delta u_i \Delta v_k + o(\delta_{ik}^2)$. Суммируя эти четырехугольники, получим, что площадь области \bar{D} приближенно равна величине

$$\bar{S} = \sum_{i,k} |J(u_i, v_k)| \Delta u_i \Delta v_k.$$

Пусть теперь каждый из прямоугольников в плоскости uOv стягивается в точку. Тогда – благодаря непрерывности функций $g(u, v)$ и $h(u, v)$ – элементарные четырехугольники в плоскости xOy также будут стягиваться в точки. Учитывая также непрерывность якобиана в области G , получим в пределе для области S_D точную формулу

$$S_D = \iint_G |J(u, v)| du dv. \quad (11.4)$$

Эта формула позволяет, в частности, выяснить геометрический смысл якобиана. Для этого применим к формуле (11.4) теорему о среднем. Получим:

$$S_D = |J(\xi, \eta)| S_G, \quad (11.5)$$

т. е.

$$\frac{S_D}{S_G} = |J(\xi, \eta)|. \quad (11.6)$$

Здесь (ξ, η) – некоторая точка внутри области G .

Предположим теперь, что область G мала, а (u, v) – произвольная ее точка. Тогда, в силу (11.6),

$$\frac{S_D}{S_G} \approx |J(u, v)|,$$

а значит,

$$S_D \approx |J(u, v)| S_G.$$

Отсюда вытекает следующий вывод: при отображении плоскости uOv на плоскость xOy величина $|J(u, v)|$ является коэффициентом растяжения плоскости uOv в данной точке (u, v) .

4. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть имеется интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy = I$ и пусть область D отображается при помощи формул (11.1) в область G плоскости uOv , причем это отображение взаимно однозначно. Разобьем область G произвольным образом на области $\Delta G_1, \Delta G_2, \dots, \Delta G_n$ с площадями $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$. Тогда и область D разбивается соответствующими линиями на области $\Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_n$ с площадями $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. В каждой из областей ΔD_k возьмем произвольную точку и составим сумму

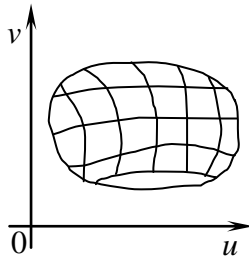


Рис. 11.6

$$\tilde{S} = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta s_k.$$

На основании формулы (11.5),

$$\Delta s_k = |I(\xi_k, \eta_k)| \Delta \sigma_k,$$

где (ξ_k, η_k) – некоторая точка области ΔG_k . Возьмем в качестве точки (x_k, y_k) ту точку области ΔD_k , которая

отображается именно в точку (ξ_k, η_k) (поскольку интеграл I существует, то точка (x_k, y_k) в интегральной сумме может быть взята произвольно). Иными словами, мы положим

$$x_k = g(\xi_k, \eta_k), \quad y_k = h(\xi_k, \eta_k).$$

Тогда интегральная сумма примет вид:

$$\tilde{S} = \sum_{k=1}^n f(g(\xi_k, \eta_k), h(\xi_k, \eta_k)) |J(\xi_k, \eta_k)| \Delta \sigma_k.$$

Считая функцию $f(x, y)$, непрерывной в области D , получим в пределе

$$I = \iint_D f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| d\sigma,$$

т. е.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv. \quad (11.7)$$

Это и есть формула замены переменных в двойном интеграле. Очевидно, формула (11.4) является частным случаем формулы (11.7) при $f(x, y) = 1$.

В частности, для полярных координат формула (11.7) запишется так:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (11.8)$$

Примечание. Предположим, что в некоторых точках или даже вдоль некоторых линий нарушается какое-нибудь из условий, при которых была выведена формула (11.7), т. е. либо взаимная однозначность отображения области D в область G , либо непрерывность функций $g(u, v)$ и $h(u, v)$ или

их частных производных $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$, $\frac{\partial h}{\partial u}$ и $\frac{\partial h}{\partial v}$. Заклучим эти точки и линии в

плоскости xOy в некоторую малую область D_ε , и пусть G_ε – образ области D_ε в плоскости uOv . Обозначим S_ε и σ_ε площади областей D_ε и G_ε .

На основании (11.7), имеем

$$\iint_{D \setminus D_\varepsilon} f(x, y) dx dy = \iint_{G \setminus G_\varepsilon} f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (11.9)$$

Интеграл справа, вообще говоря, отличается от интеграла

на величину

$$\iint_G f(g(u,v), h(u,v)) |J(u,v)| du dv$$

$$\iint_{G_\varepsilon} f(g(u,v), h(u,v)) |J(u,v)| du dv.$$

Если координатная функция ограничена в области G , то последний интеграл мал при малом σ_ε и в пределе при $s_\varepsilon \rightarrow 0$ и $\sigma_\varepsilon \rightarrow 0$ получим из (11.9) формулу (11.7), т. е. формула (11.7) оказывается верной и в этом случае.

В частности, в случае полярных координат точке $(0,0)$ плоскости xOy отвечает бесчисленное множество точек (ρ, φ) , заполняющих весь от-

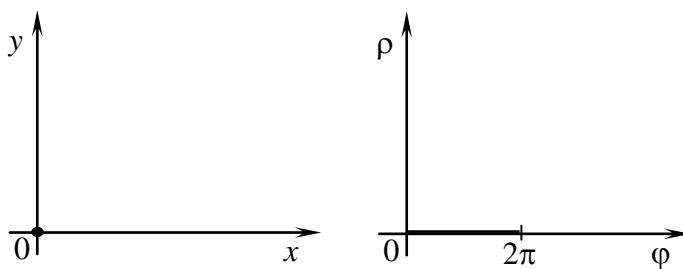


Рис. 11.7

резок $[0, 2\pi]$, рис. 11.7 т. е. в точке $(0,0)$ плоскости xOy нарушается взаим-

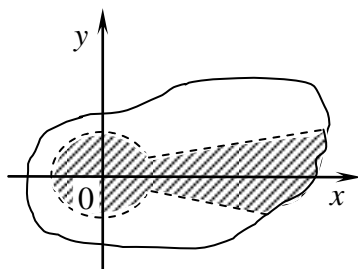


Рис. 11.8

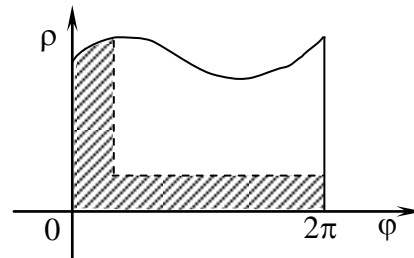


Рис. 11.9

ная однозначность отображения. Поэтому если область D содержит начало координат, то формула (11.8) может оказаться неверной. Однако, она верна для не заштрихованных областей $D \setminus D_\varepsilon$ и $G \setminus G_\varepsilon$ (рис. 11.8 и рис. 11.9).

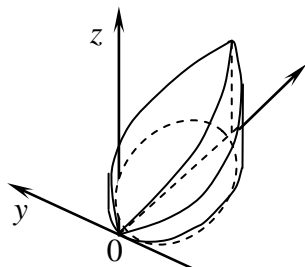


Рис. 11.10

Если величина $f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho$ ограничена в области G , то устремляя к нулю площади областей D_ε и G_ε (т. е. их меры), получим в пределе формулу (11.8) и для этого случая.

Пример 11.1. Вычислим объем тела, ограниченного плоскостью $z=0$ и поверхностями $(x-1)^2 + y^2 = 1$ и $z = x^2 + y^2$ (рис. 11.10). Имеем

$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy.$$

Перейдем здесь к полярным координатам. В данном случае

$$f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho = (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho = \rho^3,$$

а поэтому формула (11.8) дает

$$V = \iint_G \rho^3 d\rho d\varphi.$$

Перепишем уравнение границы области D (рис. 11.11) в виде

$$x^2 + y^2 = 2x.$$

В полярных координатах это уравнение выглядит так:

$$\rho^2 = 2\rho \cos \varphi,$$

т. е. $\rho = 2 \cos \varphi$ (рис. 11.12).

Следовательно, на основании (11.8),

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} \rho^3 d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^4 \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi =$$

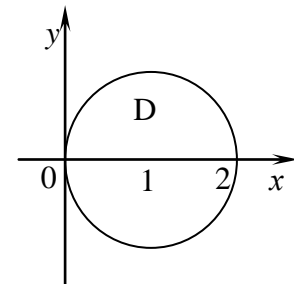


Рис. 11.11

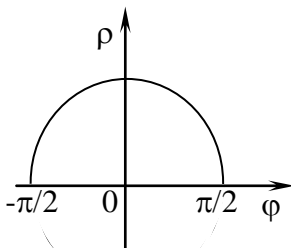


Рис. 11.12

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2 \cos 2\varphi + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) d\varphi = \frac{3}{2} \pi.$$

Примечание. При решении конкретных задач область G можно и не изображать на чертеже, а пределы интегрирования по каждой из переменных ρ и φ определять, исходя сразу из вида области D .

5. Интеграл Пуассона и его вычисление

Будем рассматривать несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Его назы-

вают интегралом Пуассона; он является одним из наиболее часто встречающихся несобственных интегралов в математике и ее приложениях, в первую очередь – в теории вероятностей. Геометрически он представляет собой площадь бесконечной $(-\infty < x < +\infty)$ фигуры, расположенной между осью Ox и кривой $y = e^{-x^2}$, рис. 11.13.

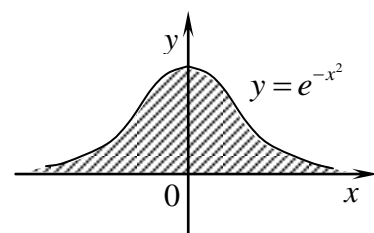


Рис. 11.13

Поскольку неопределенный интеграл $\int e^{-x^2} dx$ не выражается в конечном виде через элементарные функции (т. е. является «не берущимся»), то для вычисления интеграла Пуассона нельзя воспользоваться формулой Ньютона-Лейбница, а значит следует воспользоваться другим, специальным приемом.

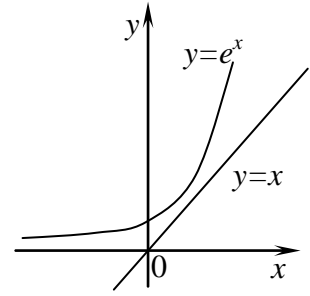


Рис. 11.14

Прежде всего, отметим, что интеграл Пуассона является сходящимся несобственным интегралом первого рода. Действительно, при всех $x > 0$ будет $e^x > x$, (рис. 11.14), а значит, при всех x будет $e^{x^2} > x^2$, т. е. $e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$. По-

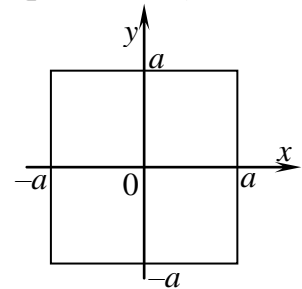


Рис. 11.15

скольку показатель знаменателя $2 > 1$, то несобственные интегралы $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ и $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx$ сходятся, а значит сходится и равный их сумме несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. При этом из четности функции e^{-x^2} следу-

ет, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Для вычисления интеграла Пуассона рассмотрим квадрат

$$D_a = \{(x, y) \mid -a \leq x \leq a, -a \leq y \leq a\}, \text{ рис. 11.15.}$$

Имеем

$$\begin{aligned} \iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} ds &= \int_{-a}^a \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx = \\ &= \int_{-a}^a \left(e^{-x^2} \int_{-a}^a e^{-y^2} dy \right) dx = \int_{-a}^a e^{-y^2} dy \cdot \int_{-a}^a e^{-x^2} dx, \end{aligned}$$

т. е.

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)} ds = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2. \quad (11.10)$$

Пусть теперь $a \rightarrow \infty$. Тогда область D_a в пределе превращается во всю плоскость xOy , которую мы обозначим D_{∞} . Поэтому

$$\iint_{D_{\infty}} e^{-(x^2+y^2)} ds = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2, \quad (11.11)$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\iint_{D_{\infty}} e^{-(x^2+y^2)} ds}. \quad (11.12)$$

Заметим, что поскольку равенство (11.11) получено из (11.10) предельным переходом при $a \rightarrow \infty$, то под величиной $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ в формуле

(11.12) фактически подразумевается предел $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a e^{-x^2} dx$, а это есть в.р.

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$, т. е. главное значение интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Но, как мы выдели,

интеграл Пуассона сходится, а значит, его главное значение совпадает с самим интегралом.

Итак, для вычисления интеграла Пуассона теперь достаточно вычислить «несобственный» двойной интеграл, стоящий справа в равенстве (11.12). Поскольку подынтегральная функция в нем фактически есть функция одного аргумента: $x^2 + y^2$, то целесообразно совершить переход к полярным координатам. Для этого введем сначала круг

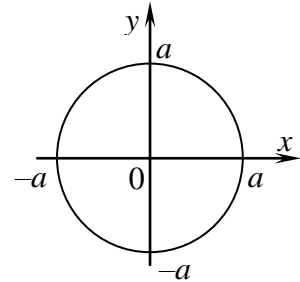


Рис. 11.16

$B_a = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$, рис. 11.16.

Тогда

$$\begin{aligned} \iint_{B_a} e^{-(x^2+y^2)} ds &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\varphi = 2\pi \int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho = \\ &= \pi \int_0^a e^{-\rho^2} d(\rho^2) = \pi e^{-\rho^2} \Big|_a^0, \end{aligned}$$

т. е.

$$\iint_{B_a} e^{-(x^2+y^2)} ds = \pi(1 - e^{-a^2}). \quad (11.13)$$

Отсюда в пределе при $a \rightarrow \infty$ получим

$$\iint_{B_{\infty}} e^{-(x^2+y^2)} ds = \pi. \quad (11.14)$$

Но, на основании перехода от (11.13) к (11.14), область B_{∞} есть круг бесконечно большого радиуса, т. е. вся плоскость xOy . Поэтому, заменяя

B_∞ на D_∞ , перепишем равенство (11.14) так

$$\iint_{D_\infty} e^{-(x^2+y^2)} ds = \pi. \quad (11.15)$$

Но тогда из формулы (11.12) находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Это и есть формула для вычисления интеграла Пуассона.

Примечание. Заменяя равенство (11.14) равенством (11.15), мы считаем, что

$$\iint_{B_\infty} e^{-(x^2+y^2)} ds = \iint_{D_\infty} e^{-(x^2+y^2)} ds. \quad (11.16)$$

Оба интеграла являются интегралами по всей плоскости xOy , однако в первом интеграле эта плоскость получена как квадрат с бесконечно большой стороной, а во втором – как круг бесконечно большого радиуса. Поэтому для доказательства истинности равенства (11.16) покажем, что предел

$$\lim_{B \rightarrow D_\infty} \iint_B e^{-(x^2+y^2)} ds$$

не зависит от того, каким способом область B расширяется на всю плоскость xOy .

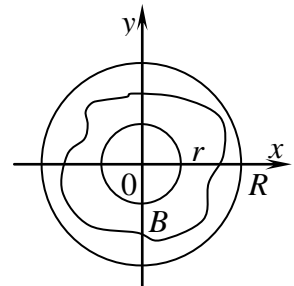


Рис. 11.17

Пусть $r < R$. Рассмотрим круги B_r и B_R , и пусть B – область произвольной формы, такая, что $B_r \subset B \subset B_R$, рис. 11.17.

Тогда, поскольку $e^{-(x^2+y^2)} > 0$ при всех (x, y) , то

$$\iint_{B_r} e^{-(x^2+y^2)} ds < \iint_B e^{-(x^2+y^2)} ds < \iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} ds. \quad (11.17)$$

Но, на основании формулы (11.14)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \iint_{B_r} e^{-(x^2+y^2)} ds = \pi, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{B_R} e^{-(x^2+y^2)} ds = \pi.$$

Поэтому из (11.17), в силу известного свойства пределов, следует, что и $\lim_{B \rightarrow D_\infty} \iint_B e^{-(x^2+y^2)} ds = \pi$, какую бы форму не имела область B .

6. Криволинейные координаты в пространстве

Пусть ограниченная замкнутая область D пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается в область G пространства $Ouvw$ при помощи

формул

$$\begin{cases} u = p(x, y, z), \\ v = q(x, y, z), \\ w = r(x, y, z), \end{cases} \quad (11.18)$$

где правые части есть непрерывные в области D функции. При этом поверхность ∂D отображается в поверхность ∂G .

Из равенства (11.18) для любой точки $(u, v, w) \in G$ имеем

$$\begin{cases} x = g(u, v, w), \\ y = h(u, v, w), \\ z = l(u, v, w). \end{cases} \quad (11.19)$$

Следовательно, задание тройки чисел (u, v, w) равносильно заданию тройки чисел (x, y, z) , в связи с чем величины u , v и w называют криволинейными координатами точки (x, y, z) в пространстве.

Геометрическое место точек, для которых одна из криволинейных координат сохраняет постоянное значение, называется координатной поверхностью этой координаты. Очевидно, для каждой из координат u , v и w существует целое семейство координатных поверхностей. При этом через каждую точку области D проходит по одной поверхности каждого семейства.

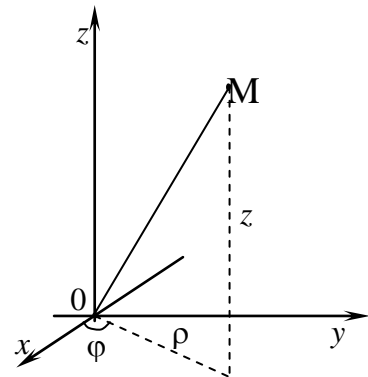


Рис. 11.18

Примером криволинейных координат в пространстве являются так называемые цилиндрические координаты. Ими являются величины ρ , φ и z , задание которых, очевидно, полностью характеризуют положение точки M в пространстве (рис. 11.18). Формулы (11.19) в данном случае имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

причем здесь $\rho \geq 0$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Координатными поверхностями являются:

а) для координаты ρ – круговые цилиндры, осью которых является ось Oz (откуда и происходит название этой системы координат);

б) для координаты φ – полуплоскости, «выходящие» из оси Oz ;

в) для координаты z – плоскости параллельные плоскости xOy .

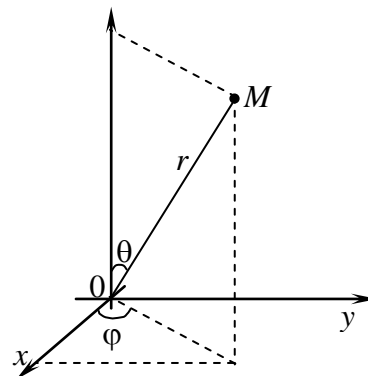


Рис. 11.19

Вторым примером криволинейных координат в пространстве являются величины r , φ и θ , называемые сферическими координатами точки M (рис. 11.19). Очевидно,

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

причем $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Координатными поверхностями являются:

а) для координаты r – сферы с центром в точке O (откуда и название этих координат);

б) для координаты φ – круговые «полуконусы», осью которых служит ось Oz ;

в) для координаты θ – полуплоскости, выходящие из оси Oz .

В случае цилиндрических и сферических координат взаимно однозначное соответствие отображения нарушается вдоль оси Oz .

7. Элемент объема в криволинейных координатах

Возьмем в области G элементарный прямоугольный параллелепипед, образованный тремя парами плоскостей, параллельных плоскостям uOv , uOw , vOw . Ему отвечает в области D элементарное тело, образованное пересечением трех пар координатных поверхностей. Предполагая, что функции $g(u, v, w)$, $h(u, v, w)$ и $l(u, v, w)$ имеют в области G непрерывные частные производные по каждому из аргументов, заключаем (ср. с §2), что объем упомянутого элементарного тела с точностью до малых высшего порядка равен объему прямоугольного параллелепипеда, построенного

на векторах $\left\{ \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u, \frac{\partial l}{\partial u} \Delta u \right\}$, $\left\{ \frac{\partial g}{\partial v} \Delta v, \frac{\partial h}{\partial v} \Delta v, \frac{\partial l}{\partial v} \Delta v \right\}$ и $\left\{ \frac{\partial g}{\partial w} \Delta w, \frac{\partial h}{\partial w} \Delta w, \frac{\partial l}{\partial w} \Delta w \right\}$. Смешанное произведение этих векторов равно

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial h}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial l}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial g}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial h}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial l}{\partial v} \Delta v \\ \frac{\partial g}{\partial w} \Delta w & \frac{\partial h}{\partial w} \Delta w & \frac{\partial l}{\partial w} \Delta w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \\ \frac{\partial l}{\partial u} & \frac{\partial l}{\partial v} & \frac{\partial l}{\partial w} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v \Delta w.$$

Определитель:

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} & \frac{\partial g}{\partial w} \\ \frac{\partial h}{\partial u} & \frac{\partial h}{\partial v} & \frac{\partial h}{\partial w} \\ \frac{\partial l}{\partial u} & \frac{\partial l}{\partial v} & \frac{\partial l}{\partial w} \end{vmatrix}$$

называется якобианом функций $g(u, v, w)$, $h(u, v, w)$ и $l(u, v, w)$ (его обозначают еще $\frac{\partial(g, h, l)}{\partial(u, v, w)}$). Итак, объем упомянутого косоугольного параллелепипеда равен

$$\Delta V = |J(u, v, w)| \Delta u \Delta v \Delta w. \quad (11.20)$$

Поэтому элементом объема в криволинейных координатах называют величину

$$dV = |J(u, v, w)| du dv dw.$$

Применим этот результат к цилиндрическим и сферическим координатам.

Для цилиндрических координат имеем

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g}{\partial \rho} & \frac{\partial g}{\partial \varphi} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial \rho} & \frac{\partial h}{\partial \varphi} & \frac{\partial h}{\partial z} \\ \frac{\partial l}{\partial \rho} & \frac{\partial l}{\partial \varphi} & \frac{\partial l}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho,$$

а так как всегда $\rho \geq 0$, то элемент объема в цилиндрических координатах равен

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz.$$

Аналогично в сферических координатах

$$\begin{aligned} J(r, \theta, \varphi) &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= (r^2 \cos \theta \sin \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos \theta \sin \theta \sin^2 \varphi) \cos \theta + \\ &+ (r \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) r \sin \theta = r^2 (\cos^2 \theta \sin \theta + \sin^3 \theta) = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Поскольку эта величина всегда положительна, то элемент объема в сферических координатах равен

$$dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr.$$

Геометрический смысл обоих полученных результатов легко усматривается из чертежей (рис. 11.20 и рис. 11.21).

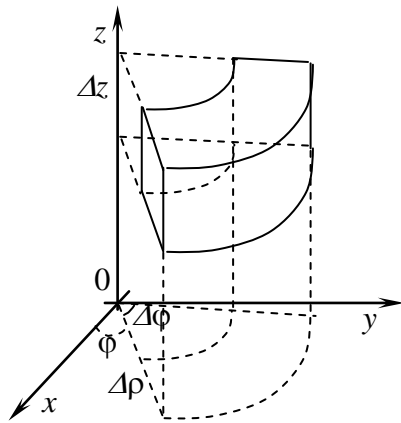


Рис. 11.20

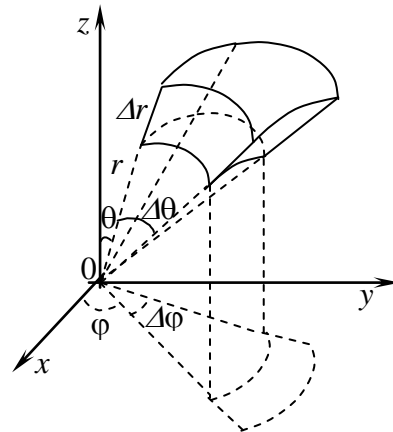


Рис. 11.21

8. Замена переменных в тройном интеграле

Формула (11.20) позволяет для объема области D получить следующую формулу

$$V_D = \iiint_G |J(u, v, w)| du dv dw. \quad (11.21)$$

Теперь, рассуждая так же, как и в двумерном случае, легко получить общую формулу замены переменных в тройном интеграле:

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iiint_G f(g(u, v, w), h(u, v, w), l(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw, \end{aligned} \quad (11.22)$$

содержащую в себе как частный случай и формулу (11.21).

Для цилиндрических и сферических координат формула (11.22) имеет соответственно вид

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz, \\ \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_G f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

Пример 11.2. Найдем массу тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ($z \geq 0$) (рис. 11.22), если его плотность в каждой точке численно равна z .

Уравнение данных поверхностей в цилиндрических координатах имеют вид

$$z = \rho^2, \quad \rho^2 + z^2 = 2,$$

т. е.

$$z = \rho^2, \quad z = \sqrt{2 - \rho^2}.$$

Решая их совместно, найдем, что эти поверхности пересекаются по окружности

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

Поэтому:

$$m = \iiint_D z dx dy dz = \iint_G z \rho d\rho d\varphi dz = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^1 \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} \rho z dz \right) d\rho \right] d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left(\rho \int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} z dz \right) d\rho = \pi \int_0^1 \rho z^2 \Big|_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} d\rho =$$

$$= \pi \int_0^1 \rho (2 - \rho^2 - \rho^4) d\rho = \pi \int_0^1 (2\rho - \rho^3 - \rho^5) d\rho = \pi \left(\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \pi \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{12} \pi.$$

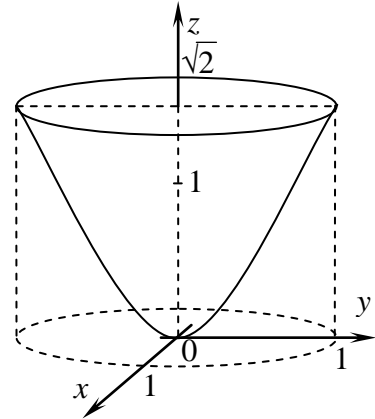


Рис. 11.22

Пример 11.3. Вычислим момент инерции относительно точки O однородного шара, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ (рис. 11.23), если его плотность численно равна 1.

Данная сфера имеет в сферических координатах уравнение

$$r = 2 \cos \theta$$

(это следует из декартова уравнения сферы, если в него вместо x , y и z подставить их выражения через r , θ и φ). Поэтому:

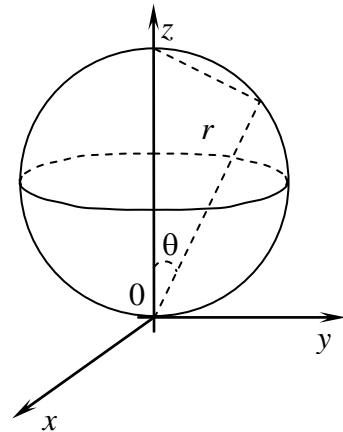


Рис. 11.23

$$I_0 = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = \iiint_G r^2 r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \theta} r^4 \sin \theta dr \right) d\theta \right] d\varphi = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin \theta \int_0^{2 \cos \theta} r^4 dr \right) d\theta = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \frac{r^5}{5} \Big|_0^{2 \cos \theta} d\theta =$$

$$= \frac{64\pi}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 \theta \sin \theta d\theta = \frac{64\pi}{5} \cdot \frac{\cos^6 \theta}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{64\pi}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{32\pi}{15}.$$

Задачи и упражнения к главе XI

1. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$ и плоскостью $z = 0$.
2. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = 2y$ и плоскостями $z = 0$, $y = x$, $z = x + y$.
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $(x^2 + y^2)^2 = R^2(x^2 - y^2)$ и плоскостью $z = 0$.
4. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4x$, $z = \sqrt{x}$ и плоскостью $z = 0$.
5. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2y$, $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = \sqrt{3}x$ ($x \geq 0$).
6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 = xy$, $x^2 + y^2 = 4$.
7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 2y$, $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 0$.
8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2 - 4y^2$, $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $z = 0$, $y = 0$, $y = x$.
9. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = x + y$ и плоскостями $z = 0$, $z = x + y$.
10. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = (y + 2)^2$ и плоскостью $z = 0$.
11. Найти площадь поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, находящейся внутри поверхности $x^2 + y^2 = 2x$.
12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = x$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \sqrt{3}x$.
13. Найти площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = x$ от окружности $x^2 + y^2 = 2x$.

14. Найти площадь части поверхности $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$, вырезанной плоскостью $z = 0$ и поверхностью $x^2 + y^2 = 1$ ($z > 0$).
15. Найти массу пластинки, ограниченной линией $x^2 + y^2 = 8xy$, если плотность в каждой её точке равна $\gamma = x^2 + y^2$.
16. Найти момент инерции однородного сегмента, отсекаемого прямой $y = x$ от окружности $x^2 + y^2 = 2x$, относительно оси Ox .
17. Найти момент инерции относительно начала координат однородной пластинки, ограниченной линией $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.
18. Найти центр тяжести полукруга радиуса R , если его плотность численно равна расстоянию от диаметра.
19. Найти центр тяжести однородной пластинки, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 2y$, $y = x$, $y = -x$ ($y \geq |x|$).
20. Найти центр тяжести однородного полукруга радиуса R .
21. Найти момент инерции однородной пластинки, ограниченной линиями $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ и $y = \sqrt{3}x$, относительно начала координат.
22. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$.
23. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z^2 + x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $z^2 = x^2 + y^2$.
24. Найти массу тела, ограниченного плоскостями $x = 0$, $z = 0$, $y = 0$, $y + x + z = 2$ и поверхностью $x^2 + y^2 = 1$, если его плотность в каждой точке равна $\gamma = x + y$.
25. Найти массу тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, если его плотность в каждой точке равна $\gamma = z$.
26. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 4$, относительно начала координат.
27. Найти момент инерции однородного цилиндра радиуса R , высоты H и плотности γ относительно образующей.
28. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.
29. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверх-

ностью $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью $z = 4$.

30. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностью $2z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = x + y$.

31. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

32. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

33. Найти центр тяжести той части однородного шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, которая лежит в первом октанте.

34. Найти центр тяжести той части однородного шара, $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, которая лежит в первом и втором октантах.

35. Найти объем тела, ограниченного замкнутой поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z(x^2 + y^2)$.

36. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = z^4$ относительно начала координат.

37. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, относительно начала координат.

38. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z^2 + x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$.

39. Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$, если его плотность численно равна расстоянию от начала координат.

40. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного поверхностями $z = 2x^2 + 2y^2$, $z = 3 - x^2 - y^2$.

41. Найти момент инерции однородного шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4z$ относительно начала координат.

42. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = z$, относительно начала координат.

43. Найти момент инерции однородного тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = z^2$, относительно начала координат.

44. Найти объем тела, ограниченного поверхностью $x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями $z = x$, $z = 2x$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматгиз, 1959. – Т.1,2,3.
2. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1964.
3. Будаков Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1965.
4. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Вып. 1. – М.: Наука, 1967.
5. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 2. – М.: Наука, 1973.
6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988.
7. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
9. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1983.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть 1

Предисловие	3
I. Введение в математический анализ	6
1. Основные логические символы.....	6
2. Простейшие понятия и обозначения теории множеств.....	6
3. Рациональные и иррациональные числа.....	8
4. Модуль числа и его свойства.....	11
5. Интервалы и промежутки.....	12
6. Постоянные и переменные величины. Классификация переменных.....	13
7. Функция и способы её задания.....	15
8. Область определения функции.....	16
9. Чётные и нечётные функции. Периодические функции.....	17
10. Однозначные и многозначные функции.....	18
11. Обратная функция.....	18
12. Основные элементарные функции.....	20
13. Сложные функции.....	25
14. Элементарные функции.....	26
Упражнения к главе I	26
II. Предел числовой последовательности	28
1. Определение предела числовой последовательности.....	28
2. Простейшие свойства пределов числовых последовательностей.....	30
3. Бесконечно большие последовательности.....	32
4. Бесконечно малые последовательности и их свойства.....	34
5. Арифметические свойства пределов числовых последовательностей.....	36
6. Лемма о стягивающихся отрезках.....	38
7. Точная верхняя и нижняя грани числовых множеств.....	38
8. Предел монотонной последовательности.....	41
9. Решение характерных примеров на признаки существования пределов числовой последовательности.....	42
10. Лемма Больцано–Вейерштрасса.....	48
Упражнения к главе II	49
III. Предел функции. Непрерывность функций	51
1. Предел функции в точке и на бесконечности.....	51
2. Односторонние пределы функции в точке.....	54
3. Свойства пределов функций.....	56
4. Второе определение пределов функции в точке и на бесконечно-	

сти.....	59
5. Непрерывность функции в точке и на промежутке.....	62
6. Другие формы определения непрерывности функции в точке.....	63
7. Основные теоремы о непрерывных функциях.....	65
8. Непрерывность основных элементарных функций.....	66
9. Классификация точек разрыва функций.....	68
10. О строгих определениях основных элементарных функций.....	71
11. Основные виды неопределенных выражений и простейшие способы их раскрытия.....	72
12. Сравнение бесконечно малых.....	75
13. Эквивалентные бесконечно малые.....	77
14. Первый замечательный предел и его следствия.....	80
15. Число e как предел числовой последовательности.....	83
16. Второй замечательный предел.....	84
17. Следствия второго замечательного предела.....	86
18. О сравнении бесконечно больших величин.....	89
19. Теоремы Больцано–Коши.....	90
20. Условие непрерывности монотонной функции.....	93
21. Доказательство теоремы о существовании и непрерывности обратной функции.....	94
22. Теоремы Вейерштрасса.....	95
23. Равномерная непрерывность функции.....	97
Упражнения к главе III	99
IV. Производная и дифференциал	103
1. Некоторые задачи, приводящие к понятию производной.....	103
2. Производная, ее геометрический смысл.....	104
3. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции..	106
4. Производная степенной функции.....	107
5. Основные правила нахождения производной.....	108
6. Производная показательной и логарифмической функций.....	110
7. Производные тригонометрических функций.....	111
8. Производная обратной функции.....	112
9. Производные обратных тригонометрических функций.....	112
10. Производные гиперболических и обратных гиперболических функций.....	113
11. Таблица основных формул и правил нахождения производных....	114
12. Производная сложной функции.....	115
13. Дифференцирование неявных функций.....	116
14. Логарифмическое дифференцирование.....	118

15. Геометрические и физические приложения производных.....	119
16. Производные высших порядков.....	122
17. Формула Лейбница.....	123
18. Дифференциал функции.....	125
19. Инвариантность дифференциала.....	128
20. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.....	128
21. Дифференциалы высших порядков.....	130
22. Параметрическое задание функций и линий.....	130
23. Дифференцирование функций, заданных параметрически.....	134
Задачи и упражнения к главе IV.....	136
V. Применение производных к исследованию функций и линий...	138
1. Случаи недифференцируемости функций, непрерывных в данной точке.....	138
2. Теорема Ферма.....	139
3. Теорема Ролля.....	140
4. Теорема Лагранжа и её следствия.....	142
5. Теорема Коши.....	144
6. Возрастание и убывание функции на промежутке.....	144
7. Экстремум функции.....	146
8. О наибольшем и наименьшем значениях функции на промежутке..	148
9. О решении задач на наибольшее и наименьшее значения.....	150
10. Выпуклость и вогнутость линий. Точки перегиба.....	151
11. Второе правило исследования функции на экстремум.....	153
12. Нахождение асимптот линий.....	154
13. Схема и пример полного исследования функции.....	156
14. Кривизна плоской кривой.....	158
15. Радиус кривизны и центр кривизны.....	160
16. Эволюта, эвольвента и их свойства.....	162
17. Правило Лопиталю раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$	165
18. Раскрытие неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty}$ по правилу Лопиталю.....	169
19. Раскрытие показательных-степенных неопределённостей.....	173
20. Приближённое вычисление корней уравнений методом хорд и касательных.....	174
21. Приближённое решение уравнений итерационным методом Пикара.....	180
22. Формула Тейлора.....	185

Задачи и упражнения к главе V	188
VI. Неопределенный интеграл и необходимые сведения из алгебры	191
1. Первообразная функция.....	191
2. Неопределенный интеграл и простейшие формулы интегрирования.....	193
3. Свойства неопределенных интегралов.....	196
4. Интегрирование по частям.....	198
5. Интегрирование путем замены переменной.....	200
6. Таблица основных интегралов.....	202
7. Комплексные числа и действия с ними.....	203
8. Геометрическая форма комплексных чисел.....	206
9. Тригонометрическая форма комплексных чисел.....	207
10. Последовательность комплексных чисел и ее предел.....	209
11. Комплексная степень числа e	210
12. Понятие о комплекснозначных функциях.....	213
13. Показательная форма и логарифм комплексного числа.....	215
14. Формулы Эйлера.....	216
15. Разложение многочлена на множители.....	217
16. Рациональные дроби и их разложение на простейшие.....	219
17. Интегрирование рациональных дробей.....	225
18. Интегрирование рациональных тригонометрических выражений..	227
19. Об интегралах, не выражающихся в конечном виде через элементарные функции.....	231
Задачи и упражнения к главе VI	232
VII. Определенный интеграл и его приложения	234
1. Некоторые задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.....	234
2. Определенный интеграл и его геометрический смысл.....	236
3. Суммы Дарбу и их свойства.....	238
4. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции.....	240
5. Интегрируемость непрерывной функции.....	241
6. Интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва.....	244
7. Теорема о квазиинтегральной сумме.....	246
8. Простейшие свойства определенного интеграла.....	247
9. Свойство аддитивности интеграла.....	250
10. Интегральные теоремы о среднем.....	252

11. Интеграл с переменным верхним пределом.....	255
12. Формула Ньютона–Лейбница. Связь определенного интеграла с неопределенным.....	257
13. О связи между дифференциальными и интегральными теоремами о среднем.....	259
14. Формула интегрирования по частям для определенного интеграла.....	260
15. Новые формы остаточного члена формулы Тейлора.....	261
16. Замена переменной в определенном интеграле.....	263
17. Интегралы от четных и нечетных функций в симметричных пределах.....	264
18. Вычисление площадей фигур при помощи интегралов.....	265
19. Вычисление длин дуг при помощи интегралов.....	269
20. Вычисление объема при помощи интегралов.....	273
21. Вычисление площадей поверхностей вращения.....	275
22. Нахождение координат центров тяжести. Теоремы Гульдина.....	277
23. Примеры применения интегралов к решению физических задач..	280
Задачи и упражнения к главе VII.....	284
VIII. Несобственные интегралы.....	288
1. Несобственные интегралы первого рода.....	288
2. Несобственные интегралы 2-го рода.....	294
3. Интегрирование по частям и замена переменной в несобственном интеграле.....	299
Задачи и упражнения к главе VIII.....	302
IX. Дифференциальное исчисление функций многих переменных.....	303
1. Точки и окрестности в n -мерном пространстве.....	303
2. Предел последовательности точек.....	305
3. Открытые и замкнутые множества в R_n	307
4. Линии и области в пространстве R_n	310
5. Понятие функции n переменных.....	311
6. Предел функции многих переменных.....	313
7. Повторные пределы.....	315
8. Непрерывность и разрывы функций многих переменных.....	317
9. Свойства непрерывных функций.....	319
10. Частные производные функции.....	321
11. Полный дифференциал функции.....	323
12. Применение полных дифференциалов в приближенных вычислениях.....	325

13. Дифференцирование сложных функций.....	327
14. Инвариантность формы полного дифференциала.....	329
15. Однородные функции. Тождество Эйлера.....	330
16. Частные производные высших порядков.....	331
17. Полные дифференциалы высших порядков.....	334
18. Формула Тейлора для функции многих переменных.....	335
19. Экстремум функции многих переменных.....	337
20. Необходимые сведения о квадратичных формах.....	338
21. Достаточные условия экстремума функции n переменных.....	339
22. Условный экстремум функции.....	344
23. Касательная и нормальная плоскость пространственной линии.....	353
24. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.....	355
25. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.....	357
26. Огибающая однопараметрического семейства плоских линий.....	358
Задачи и упражнения к главе IX.....	361
X. Кратные интегралы.....	363
1. Некоторые задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.....	363
2. Двойной интеграл и его геометрический смысл.....	364
3. Основные теоремы об интегрируемости функции.....	365
4. О свойствах двойного интеграла.....	366
5. Вычисление двойного интеграла по прямоугольной области.....	367
6. Вычисление двойного интеграла в случае произвольной области....	369
7. Вычисление площади поверхности при помощи двойного интеграла.....	372
8. Физические приложения двойных интегралов.....	374
9. Тройной интеграл, его вычисление и применение.....	376
XI. Кратные интегралы в криволинейных координатах.....	382
1. Криволинейные координаты на плоскости.....	382
2. Элемент площади в криволинейных координатах.....	383
3. Вычисление площади в криволинейных координатах.....	385
4. Замена переменных в двойном интеграле.....	386
5. Интеграл Пуассона и его вычисление.....	389
6. Криволинейные координаты в пространстве.....	392
7. Элемент объема в криволинейных координатах.....	394
8. Замена переменных в тройном интеграле.....	396
Задачи и упражнения к главе XI.....	398
Литература.....	401
Оглавление.....	402

Навчальний посібник

СЕНЧУК Юрій Федорович

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДЛЯ ИНЖЕНЕРІВ

Частина I

Відповідальний за випуск Курпа Л.В.

В авторській редакції

Комп'ютерний набір оригінал-макета

План 2003 р.

Підписано до друку Формат . Папір друк. Друк – різнографія.
Умов. друк. арк. . Облік. вид. арк. . Тираж 500 прим. Зам. №
Ціна договірна.

Підрозділ оперативного друку НТУ“ХПІ”. Різнограф
НТУ“ХПІ”, 61002, м. Харків, вул. Фрунзе, 21
