2.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Означення. *Лінійним однорідним диференціальним рівнянням n–го порядку зі сталими коефіцієнтами* називається рівняння, *лінійне відносно невідомої функції* $y = y(x)$ *та її похідних* $y', y'', \ldots, y^{(n)}$:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{3.1}$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - дійсні числа (деякі з них можуть дорівнювати нулю).

Розглянемо *лінійне однорідне диференціальне рівняння 2–го порядку зі сталими коефіцієнтами* вигляду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{3.2}$$

та встановимо деякі властивості його розв'язків.

Означення. Функції $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними* на інтервалі (a,b), якщо рівність

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0, \text{ де } \alpha_1, \alpha_2 \in R, \tag{3.3}$$

виконується тоді і тільки тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Якщо хоча б одне з чисел α_1 або α_2 відмінні від нуля і виконується рівність (3.3), то функції y_1 та y_2 називаються *лінійно залежними* на інтервалі (a,b).

Очевидно, що дві функції y_1 та y_2 *лінійно залежні* тоді і тільки тоді, коли вони пропорційні, тобто виконується рівність

$$\frac{y_1}{y_2} = \lambda \quad \text{або} \quad y_1 = \lambda y_2, \quad \text{де } \lambda = const \ .$$

Більш універсальним засобом вивчення лінійної залежності системи функцій є, так званий, *визначник Вронського* або *вронскіан*.

Означення. *Визначником Вронського* системи двох функцій $y_1 = y_1(x)$ та $y_2 = y_2(x)$ називаються визначник 2-го порядку

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} .$$

Для того щоб система розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійного однорідного рівняння (3.2) була *лінійно незалежною* на інтервалі (a,b), необхідно і достатньо, щоб вронскіан на цьому інтервалі був відмінний від нуля.

Означення. Сукупність будь-яких двох лінійно незалежних на інтервалі (a,b) частинних розв'язків $y_1(x)$ та $y_2(x)$ лінійного однорідного рівняння (3.2) утворює *фундаментальну систему* розв΄язків цього рівняння. Тобто будь-який довільний розв'язок може бути поданий лінійною комбінацією лінійно незалежних (фундаментальних) розв'язків:

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) .$$

Теорема *(про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку)*

Якщо два частинні розв'язки $y_1 = y_1(x)$ і $y_2 = y_2(x)$ лінійного однорідного диференціальне рівняння 2–го порядку (3.2) утворюють на інтервалі (a,b) фундаментальну систему, то загальним розв'язком цього рівняння є функція

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 , \tag{3.4}$$

де C_1 і C_2 - довільні сталі.

Тобто, для знаходження загального розв'язку рівняння (3.2) достатньо знайти два лінійно незалежних розв'язки цього рівняння, які утворюють фундаментальну систему розв'язків.

Частинні розв'язки лінійного однорідного диференціальне рівняння шукають у вигляді

$$y = e^{\lambda x},$$

де λ - стала (дійсна чи комплексна), яку треба знайти.

Тоді

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \ y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}.$$

Підставляючи значення y, y' і y'' в рівняння (3.2), отримаємо:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a_1 \lambda e^{\lambda x} + a_2 e^{\lambda x} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2\right) = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, маємо

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \tag{3.5}$$

Означення. Рівняння (3.5) називається *характеристичним рівнянням* для лінійного однорідного рівняння (3.2).

Для його складання достатньо в рівнянні (3.2) зробити заміну:

$$y'' = \lambda^2, \ y' = \lambda, \ y = \lambda^0 = 1.$$

Залежно від коренів характеристичного рівняння (3.5) можливі такі розв'язки рівняння (3.2):

1. Корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння (3.5) *дійсні й різні* (*прості*), тобто $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R$.

   В цьому випадку частинними розв'язками рівняння (3.2) є функції $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ і $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Вони утворюють фундаментальну систему розв'язків на довільному проміжку числової осі, оскільки

   $$\frac{y_1}{y_2} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} \neq \text{const}.$$

   Можна також показати, що визначник Вронського для цих функцій відмінний від нуля. Дійсно,

   $$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = \lambda_2 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} - \lambda_1 e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

   Тому, загальний розв'язок рівняння (3.2), згідно формули (3.4) має вигляд

   $$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{3.6}$$

2. Корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння (3.5) *дійсні й рівні* (*кратні*), тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in R$.

В цьому випадку лінійно незалежними частинними розв'язками рівняння (3.2) будуть функції $y_1 = e^{\lambda x}$ і $y_2 = xe^{\lambda x}$, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{x} \neq \text{const}.$$

Також неважко переконатися, що вронскіан для цих функцій відмінний від нуля. Тобто вони утворюють фундаментальну систему розв'язків і тому загальний розв'язок рівняння (3.2) має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}. \qquad (3.7)$$

3. Корені λ_1 і λ_2 характеристичного рівняння (3.5) комплексно-спряжені, тобто $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$, $b \neq 0$.

В цьому випадку частинні лінійно незалежні розв'язки мають вигляд

$$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx,$$

оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{ax}\cos bx}{e^{ax}\sin bx} = ctg bx \neq \text{const} \quad \text{або} \quad W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тоді загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (3.2):

$$y = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx\right). \qquad (3.8)$$

Зауваження. Розглянутий вище метод знаходження загального розв'язку лінійного однорідного рівняння (3.2) зводиться до знаходження коренів характеристичного рівняння (3.5) та використання формул (3.6) - (3.8) без його інтегрування.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 5y' - 6y = 0.$$

<u>Розв'язання.</u> Задане рівняння є лінійним однорідним диференціальним рівнянням 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду (3.2).

Складемо для нього характеристичне рівняння. Для цього замінимо в рівнянні функцію y та її похідні y', y'' відповідними степенями λ:

$$y'' = \lambda^2, \quad y' = \lambda, \quad y = \lambda^0 = 1.$$

Тоді маємо

$$\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0.$$

Знаходимо його корені: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -6$.

Оскільки корені характеристичного рівняння *дійсні й різні*

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \in R,$$

то має місце випадок **1**.

Тоді, згідно з формулою (8.6), *загальний розв'язок* цього рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-6x}.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' + 6y' + 9y = 0.$$

Розв’язання. Задано лінійне однорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду (3.2).

Складемо його характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0.$$

Як бачимо, корені характеристичного рівняння *дійсні й кратні*

$$\lambda_{1,2} = -3 \in R,$$

тобто має місце випадок **2**.

Отже, згідно з формулою (3.7), *загальний розв'язок* цього рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

Приклад 3. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Розв’язання. Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

Корені цього квадратного рівняння – *комплексно-спряжені числа*

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm i \in C.$$

Отже, має місце випадок **3**, де дійсна частина $a = 2$ і уявна $b = 1$.

Тоді, згідно з формулою (3.8), шуканий *загальний розв'язок* заданого рівняння набуває вигляду

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$$

Приклад 4. Розв'язати задачу Коші

$$y'' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 4..$$

Розв'язання. Спочатку необхідно знайти фундаментальну систему розв'язків, потім скласти загальний розв'язок, нарешті, використовуючи початкові умови, знайти частинний розв'язок.

Складемо характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню, і знайдемо його корені:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Отже, $y_1(x) = \cos 2x$, $\qquad y_2(x) = \sin 2x$ і загальний розв'язок однорідного рівняння буде таким:

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Для визначення сталих C_1 і C_2 скористаємось початковими умовами, для чого попередньо знайдемо

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x.$$

У результаті маємо систему рівнянь відносно C_1 і C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \cdot 0 = 1, \\ -2C_1 \cdot 0 + 2C_2 = 4. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C_1 = 1, \\ C_2 = 2. \end{array} \right.$$

Підставляючи значення сталих C_1 і C_2 в загальний розв'язок, знаходимо шуканий *частинний розв'язок* однорідного рівняння:

$$y = \cos 2x + 2\sin 2x.$$

Розглянутий вище метод побудови загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами можна поширити і на рівняння n–го порядку вигляду (3.1).

2.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Означення. *Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n–го порядку зі сталими коефіцієнтами* називається рівняння вигляду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (4.1)$$

де коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - дійсні числа, а $f(x) \neq 0$ - задана функція, неперервна на деякому проміжку (a, b).

Означення. Рівнянні вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (4.2)$$

ліва частина якого співпадає з лівою частиною лінійного неоднорідного рівняння (4.1), а права $f(x) = 0$, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням*, відповідним даному неоднорідному рівняння (4.1).

Теорема *(про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння)*

Загальний розв’язок $y_{зн}$ лінійного неоднорідного диференціального рівняння (4.1) дорівнює сумі загального розв'язку $y_{зо}$ відповідного однорідного рівняння (4.2) і деякого частинного розв'язку $y_{чн}$ рівняння (4.1), тобто

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}. \qquad (4.3)$$

Метод варіації довільних сталих

(метод Лагранжа)

Розглянемо *лінійне неоднорідне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами* вигляду:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \qquad (4.4)$$

Тоді відповідне йому однорідне рівняння має вигляд

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0. \qquad (4.5)$$

Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння, загальний розв’язок рівняння (9.4) визначається формулою (4.3), в якій

$$y_{зо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \qquad (4.6)$$

- *загальний розв'язок* відповідного однорідного рівняння 2-го порядку (3.2), а $y_{чн}$ - *частинний розв'язок* неоднорідного рівняння (4.4).

Будемо шукати *загальний розв'язок* неоднорідного рівняння (4.4) у такому ж вигляді, замінивши у формулі (4.6) сталі C_1 і C_2 невідомими функціями від x, які слід підібрати так, щоб функція

$$y_{зн} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) \tag{4.7}$$

задовольняла неоднорідне рівняння (4.4), тобто була його розв'язком.

Функція (4.7) буде розв'язком рівняння (4.4), коли $C_1(x)$ і $C_2(x)$ задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{4.8}$$

Система (4.8) є лінійною неоднорідною системою рівнянь відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$. Визначник цієї системи $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ не дорівнює нулю, оскільки це визначник Вронського $W(y_1, y_2)$ для системи лінійно незалежних частинних розв'язків $y_1(x)$ і $y_2(x)$ однорідного рівняння (4.5). Отже система (4.8) має єдиний розв'язок (сумісна), що може бути знайдений, за формулами Крамера, або будь-яким іншим способом:

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}, \qquad C_2'(x) = \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}.$$

Інтегруючи ці функції знаходимо:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx + \overline{C}_1, \qquad C_2(x) = \int \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx + \overline{C}_2,$$

де $\overline{C}_1$ і $\overline{C}_2$ - довільні сталі інтегрування.

Підставляючи значення функцій $C_1(x)$ і $C_2(x)$ в рівняння (4.7), отримаємо *загальний розв'язок* неоднорідного рівняння (4.4):

$$y_{зн} = \overline{C}_1(x)y_1(x) + \overline{C}_2(x)y_2(x) - \int \frac{y_2(x)\cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx \cdot y_1(x) + \int \frac{y_1(x)\cdot f(x)}{W(y_1, y_2)}dx \cdot y_2(x). \tag{4.9}$$

Розв'язок (4.9) задовольняє теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння, тобто має вигляд

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн},$$

де $y_{зо} = \overline{C}_1 y_1(x) + \overline{C}_2 y_2(x)$ - загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння (4.5) і

$$y_{чн} = -\int \frac{y_2(x)}{W(y_1, y_2)}dx \cdot y_1(x) - \int \frac{y_2(x)}{W(y_1, y_2)}dx \cdot y_2(x)$$

- частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (4.4).

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}.$$

Розв'язання. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного даному рівнянню однорідного рівняння:

$$y'' - y' = 0.$$

Для цього складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені:

$$\lambda^2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 1. \end{array}\right.$$

Для дійсних різних коренів характеристичного рівняння маємо лінійно незалежні частинні розв'язки однорідного рівняння:

$$y_1(x) = e^{0x} = 1, \qquad y_2(x) = e^x.$$

Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння*, згідно з формулою (3.6), має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = C_1 + C_2 e^x.$$

2. *Загальний розв'язок неоднорідного рівняння* шукатимемо у вигляді

$$y_{зн} = C_1(x) + C_2(x)e^x, \qquad (*)$$

де $C_1(x)$ і $C_2(x)$ - невідомі функції, які належить знайти склавши систему (4.8). Оскілки $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^x$ і $y_1'(x) = 0$, $y_2'(x) = e^x$ дістанемо систему, лінійну відносно функцій $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$:

$$\begin{cases} C_1'(x) \cdot 1 + C_2'(x)e^x = 0, \\ C_2'(x)e^x = \dfrac{1}{e^x + 1}, \end{cases}$$

розв'язавши яку, матимемо:

$$C_2'(x) = \frac{1}{e^x(e^x+1)}, \qquad C_1'(x) = -\frac{1}{e^x+1},$$

звідки

$$C_1(x) = -\int \frac{1}{e^x+1}dx = -\int \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}dx = -\int \frac{1+e^x}{e^x+1}dx + \int \frac{e^x}{e^x+1}dx =$$

$$= -\int dx + \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = -x + \ln\left|e^x+1\right| + \overline{C}_1,$$

$$C_2(x)=\int\frac{dx}{e^x(e^x+1)}=\int\frac{dx}{e^{2x}(1+e^{-x})}=\int\frac{e^{-2x}dx}{e^{-x}+1}=\int\frac{e^{-2x}-1+1}{e^{-x}+1}dx=$$

$$=\int\left(e^{-x}-1+\frac{e^x}{e^x(e^{-x}+1)}\right)dx=\int(e^{-x}-1)dx+\int\frac{d(e^x+1)}{e^x+1}=-e^{-x}-x+\ln\left|e^x+1\right|+\overline{C}_2.$$

3. Підставляючи функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ у передбачуваний розв'язок $(*)$, знайдемо *загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:*

$$y_{зн}=-x+\ln\left|e^x+1\right|+\overline{C}_1+\left(-e^{-x}-x+\ln\left|e^x+1\right|+\overline{C}_2\right)e^x=$$

$$=\overline{C}_1+\overline{C}_2e^x-x+\ln(e^x+1)-1-xe^x+\ln(e^x+1)e^x=$$

$$=\overline{C}_1+\overline{C}_2e^x+(e^x+1)(\ln(e^x+1)-x)-1.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'''+y'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Розв'язання. Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

1. Однорідне рівняння, що відповідає йому

$$y'''+y'=0$$

має такі корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^3+\lambda=0 \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1=0,\\ \lambda_2=\pm i.\end{array}\right.$$

Тобто, фундаментальну систему розв'язків однорідного рівняння утворюють функції $y_1(x)=1$, $y_2(x)=\cos x$, $y_3(x)=\sin x$ і *загальний розв'язок однорідного рівняння* має вигляд:

$$y_{зо}=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x.$$

2. Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y_{зн}=C_1(x)+C_2(x)\cos x+C_3(x)\sin x. \qquad (*)$$

Складемо систему рівнянь для функцій $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $C_3'(x)$:

$$\begin{cases}C_1'(x)\cdot 1+C_2'(x)\cos x+C_3'(x)\sin x=0,\\ C_1'(x)\cdot 0-C_2'(x)\sin x+C_3'(x)\cos x=0,\\ C_1'(x)\cdot 0-C_2'(x)\cos x-C_3'(x)\sin x=\dfrac{1}{\cos^2 x}.\end{cases}$$

Дану систему зручно розв'язувати за формулами Крамера. Головний визначник системи дорівнює:

$$\Delta = W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ 1 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -\sin x & \cos x \\ -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Обчислимо допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x & \sin x \\ 0 & -\sin x & \cos x \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \sin x \\ 0 & 0 & \cos x \\ 0 & \dfrac{1}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \dfrac{1}{\cos^2 x} & -\sin x \end{vmatrix} = -\frac{1}{\cos x},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos x & 0 \\ 0 & -\sin x & 0 \\ 0 & -\cos x & \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -\sin x & 0 \\ -\cos x & \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{vmatrix} = -\frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

У результаті маємо:

$$C_1'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + \overline{C}_1;$$

$$C_2'(x) = -\frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad C_2(x) = -\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \overline{C}_2;$$

$$C_3'(x) = -\frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_3(x) = -\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\cos x} + \overline{C}_3.$$

3. Підставляючи знайдені функції $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ у вираз $(*)$, знаходимо *загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння:*

$$y_{зн} = \overline{C}_1 + tgx + \left(\overline{C}_2 + \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|\right)\cos x + \left(\overline{C}_3 - \frac{1}{\cos x}\right)\sin x =$$

$$= \overline{C}_1 + \overline{C}_2 \cos x + \overline{C}_3 \sin x + tgx + \cos x \cdot \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| - tgx =$$

$$= \overline{C}_1 + \overline{C}_2 \cos x + \overline{C}_3 \sin x + \cos x \cdot \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$