2.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду. Метод підбору частинного розв'язку

Означення. Рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x), \qquad (5.1)$$

в якому права частина

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right), \qquad (5.2)$$

коефіцієнти $a_1, a_2, \ldots, a_n, \alpha, \beta$ - дійсні числа, а $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - многочлени від x степеня n і m відповідно, називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням n–го порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною спеціального вигляду*.

Розв'язок рівняння (5.1) можна шукати методом варіації довільних сталих, але при його застосуванні доволі часто доводиться виконувати складні, громіздкі операції під час інтегрування. Проте для рівнянь зі спеціальною правою частиною існує свій більш простіший метод, який називається *методом підбору частинного розв'язку або методом невизначених коефіцієнтів.* Суть методу полягає в наступному: по вигляду правої частини $f(x)$ рівняння (5.1) записують очікувану форму його частинного розв'язку з невизначеними коефіцієнтами, потім підставляють її в рівняння (5.1) та з отриманої тотожності знаходять значення невідомих коефіцієнтів.

Нехай права частина рівняння (5.1) має спеціальний вигляд (5.2). Тоді частинний розв'язок цього рівняння слід шукати у вигляді

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_l(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_l(x)\sin\beta x\right), \qquad (5.3)$$

де r дорівнює кратності кореня λ характеристичного рівняння

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0, \qquad (5.4)$$

що співпадає з числом $\alpha + \beta i$, тобто r - число, яке показує скільки разів $\alpha + \beta i$ є коренем характеристичного рівняння (якщо характеристичне рівняння такого кореня не має, то слід покласти $r = 0$); $\widetilde{P}_l(x)$ і $\widetilde{Q}_l(x)$ - повні многочлени від x з невизначеними коефіцієнтами степеня l, яке дорівнює найбільшому з чисел n і m, тобто $l = \max\{n, m\}$; числа α і β у формулах (5.2) і (5.3) ті самі.

Зауваження 1. Многочлени $\widetilde{P}_l(x)$ і $\widetilde{Q}_l(x)$ повні бути повними, тобто містити всі степені x від нуля до l, з різними невизначеними коефіцієнтами при однакових степенях x в обох многочленах.

Зауваження 2. Якщо у вираз функції (5.2) входить хоча б одна з функцій $\cos\beta x$ або $\sin\beta x$, то у вираз $y_{чн}$ (5.3) треба завжди записувати обидві функції.

Розглянемо деякі частинні випадки функції (5.2) в рівняннях (5.1), до яких можна застосувати метод підбору частинного розв'язку, і вкажемо форму, в якій потрібно шукати частинний розв’язок цього рівняння залежно від вигляду його правої частини.

1. Нехай права частина неоднорідного рівняння (5.1) має вигляд

$$f(x) = P_n(x),$$

тобто у виразі функції (5.2) $\alpha = 0$ і $\beta = 0$, а $P_n(x)$ - многочлен степеня n. Тоді:

а) якщо $\alpha + \beta i = 0 \neq \lambda$, тобто $\lambda = 0$ не є коренем характеристичного рівняння (5.4) $(r = 0)$, то частинний розв’язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = \widetilde{P}_n(x);$$

б) якщо $\alpha + \beta i = 0 = \lambda_{1,2,\ldots,r}$, тобто $\lambda = 0$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (5.4), то частинний розв’язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = x^r \widetilde{P}_n(x).$$

Тут $\widetilde{P}_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ - повний многочлен степеня n (тобто того самого степеня, що і заданий) з невизначеними коефіцієнтами.

Щоб знайти невизначені коефіцієнти $A_0, A_1, \ldots, A_n$ необхідно знайти вирази $y'_{чн}$, $y''_{чн}, \ldots, y^{(n)}_{чн}$ і підставити їх разом із функцією $y_{чн}$ у неоднорідне рівняння (5.1), зрівняти коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, в результаті чого отримати систему $(n+1)$-го лінійних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів $A_0, A_1, \ldots, A_n$ многочлена $\widetilde{P}_n(x)$.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y'' + 3y' - 4y = 4x^2 + 3.$$

Розв'язання. Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку такого рівняння

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}.$$

1. Знайдемо спочатку загальний розв'язок відповідного даному рівнянню однорідного рівняння

$$y'' + 3y' - 4y = 0.$$

Характеристичне рівняння, що відповідає заданому однорідному рівнянню має дійсні різні корені

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l}\lambda_1 = 1,\\ \lambda_2 = -4.\end{array}\right.$$

Отже, згідно з формулою (3.6), *загальний розв'язок однорідного рівняння* має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-4x}.$$

2. Оскільки права частина заданого неоднорідного рівняння має спеціальний

вигляд (10.2) коли $\alpha = 0$ і $\beta = 0$, будемо шукати його частинний розв'язок методом підбору.

Права частина даного рівняння $P_n(x) = x^2 + 2,\ (n = 2)$ – многочлен 2-го степеня. Число $\alpha + \beta i = 0 \neq \lambda_{1,2}$, тобто серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ немає нуля, тому у формулі (5.3) $r = 0$. Має місце випадок **1a**. Отже, частинний розв'язок шукаємо у вигляді многочлена того самого 2-го степеня з невизначеними коефіцієнтами, що містить всі степені незалежної змінної x:

$$y_{чн} = Ax^2 + Bx + C.$$

Щоб знайти невизначені коефіцієнти A, B, C, підставимо цей розв'язок у вихідне рівняння, для чого попередньо обчислимо похідні функції $y_{чн}$:

$$y'_{чн} = 2Ax + B, \qquad y''_{чн} = 2A.$$

Підставляючи, маємо:

$$2A + 3(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2 + 3,$$
$$-4Ax^2 + (6A - 4B)x + 2A + 3B - 4C = 4x^2 + 3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у правій і лівій частинах рівності, матимемо:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & -4A = 4, \\ x^1 & 6A - 4B = 0, \\ x^0 & 2A + 3B - 4C = 3, \end{array}$$

звідки $A = -1$, $B = -3$, $C = -4$.

Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* має вигляд

$$y_{чн} = -x^2 - 3x - 4.$$

3. Тоді *загальний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння буде таким:

$$y_{зн} = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - x^2 - 3x - 4.$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y''' - y'' = x - 1.$$

Розв'язання. Задано лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 3-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Оскільки загальний розв'язок такого рівняння має вигляд

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн},$$

то послідовно шукаємо $y_{зо}$ і $y_{чн}$.

1. Запишемо лінійне однорідне рівняння, що відповідає даному неоднорідному

$$y''' - y'' = 0.$$

Складемо для нього характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda_{1,2} = 0, \\ \lambda_3 = 1. \end{array}\right.$$

Всі корені характеристичного рівняння дійсні, але корені $\lambda_{1,2} = 0$ - кратності 2.

Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння* має вигляд:

$$y_{зо} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x.$$

2. За виглядом правої частини заданого рівняння підберемо *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*. Оскільки в правій частині рівняння маємо $P_n(x) = x - 1$, $(n = 1)$ – многочлен 1-го степеня, а число $\alpha + \beta i = 0 = \lambda_{1,2}$, інакше кажучи характеристичне рівняння має корені $\lambda_{1,2} = 0$ кратності 2, тобто $r = 2$, то відповідно до пункту **1б** шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{чн} = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2.$$

Підставимо цей розв'язок у вихідне рівняння, для чого попередньо обчислимо

$$y'_{чн} = 3Ax^2 + 2Bx, \qquad y''_{чн} = 6Ax + 2B, \qquad y'''_{чн} = 6A.$$

Маємо:

$$6A - (6Ax + 2B) = x - 1 \quad \Rightarrow \quad -6Ax + 6A + 2B = x - 1.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, матимемо:

$$\begin{array}{l|l} x^1 & -6A = 1, \\ x^0 & 6A + 2B = -1. \end{array}$$

звідки $A = -\dfrac{1}{6}$, $B = 1$.

Тоді *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*

$$y_{чн} = -\frac{1}{6}x^3 + x^2.$$

3. *Загальний розв'язок* заданого лінійного неоднорідного диференціального рівняння 3-го порядку запишемо у вигляді

$$y_{зн} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - \frac{1}{6}x^3 + x^2.$$

2. Нехай права частина неоднорідного рівняння (5.1) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x},$$

тобто $\alpha \neq 0$ - дійсне число, $\beta = 0$, $P_n(x)$ - многочлен степеня n. Тоді:

а) якщо $\alpha + \beta i = \alpha \neq \lambda$, тобто $\lambda = \alpha$ не є коренем характеристичного рівняння (5.4) $(r = 0)$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = \widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x};$$

б) якщо $\alpha + \beta i = \alpha = \lambda_{1,2,\ldots,r}$, тобто $\lambda = \alpha$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (10.4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = x^r \widetilde{P}_n(x)e^{\alpha x},$$

де $\widetilde{P}_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$ - повний многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 3. Знайти розв'язок диференціального рівняння, що задовольняє початкові умови (*задача Коші*)

$$y'' + y' - 2y = 3xe^x, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = -\frac{1}{3}.$$

Розв'язання. Для розв'язання задачі Коші спочатку потрібно знайти загальний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, а потім за допомогою початкових умов виділити з нього частинний розв'язок.

Структура загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}.$$

1. Знайдемо загальний розв'язок $y_{чн}$ лінійного однорідного рівняння

$$y'' + y' - 2y = 0.$$

Відповідне характеристичне рівняння має дійсні різні корені:

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = -2. \end{array}\right.$$

Тоді *загальний розв'язок однорідного рівняння* набуває вигляду:

$$y_{зо} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}.$$

2. Права частина заданого рівняння має вигляд $f(x) = 3xe^x$, тобто $P_n(x) = 3x$, $(n = 1)$ – многочлен 1-го степеня, $\alpha = 1$, $\beta = 0$. Оскільки число $\alpha + \beta i = 1 = \lambda_1$, тобто характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = 1$, який співпадає з числом $\alpha + \beta i = 1$, то $r = 1$. Тоді, відповідно до пункту **2б** шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{чн} = x(Ax + B)e^x = \left(Ax^2 + Bx\right)e^x.$$

Знайдемо похідні від передбачуваного частинного розв'язку $y_{чн}$:

$$y'_{чн} = (2Ax + B)e^x + \left(Ax^2 + Bx\right)e^x = \left(Ax^2 + (2A + B)x + B\right)e^x,$$

$$y''_{чн} = (2Ax + 2A + B)e^x + \left(Ax^2 + (2A + B)x + B\right)e^x =$$
$$= \left(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B\right)e^x,$$

і підставимо їх у задане рівняння:

$$\left(Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B\right)e^x + \left(Ax^2 + (2A + B)x + B\right)e^x - 2\left(Ax^2 + Bx\right)e^x = 3xe^x,$$

$$6Ax + 2A + 3B = 3x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах останньої рівності, знайдемо невизначені коефіцієнти A і B:

$$\begin{array}{c|l} x^1 & 6A = 3, \\ x^0 & 2A + 3B = 0. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{1}{2}, \\ B = -\dfrac{1}{3}. \end{array} \right.$$

Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* набуває вигляду:

$$y_{чн} = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x \right) e^x.$$

3. Таким чином, *загальний розв'язок* неоднорідного рівняння буде таким:

$$y_{зн} = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x \right) e^x.$$

4. Для розв'язання задачі Коші, слід знайти похідну від загального розв'язку:

$$y'_{зн} = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x} + \left(x - \frac{1}{3} \right) e^x + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x \right) e^x.$$

Використовуючи початкові умови, отримаємо систему рівнянь для визначення довільних сталих C_1 і C_2:

$$\begin{array}{l} y(0) = 3, \\ y'(0) = -\dfrac{1}{3}, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 - 2C_2 = -\dfrac{1}{3}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} C_1 = 2, \\ C_2 = 1. \end{array} \right.$$

Підставляючи знайдені сталі в загальний розв'язок, отримаємо шуканий частинний розв'язок рівняння, тобто *розв'язок задачі Коші*:

$$y = 2e^x + e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x \right) e^x.$$

3. Нехай права частина рівняння (5.1) має вигляд

$$f(x) = P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x,$$

тобто $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ - дійсне число, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлен степеня n і m відповідно. Тоді:

а) якщо $\alpha + \beta i = \beta i \neq \lambda$, тобто $\lambda = \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння (5.4) $(r = 0)$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = \widetilde{P}_l(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_l(x)\sin\beta x;$$

б) якщо $\alpha + \beta i = \beta i = \lambda_{1,2,...,r}$, тобто $\lambda = \beta i$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (10.4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = x^r \left(\widetilde{P}_l(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_l(x)\sin\beta x\right),$$

де $\widetilde{P}_l(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$, $\widetilde{Q}_l(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \ldots + B_n$ - повні многочлени степеня $l = \max\{n, m\}$ з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 3y' + 2y = 2\cos 3x + 4\sin 3x.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння, як і раніше, шукатимемо у вигляді:

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}.$$

1. Однорідне рівняння, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню, має вигляд:

$$y'' + 3y' + 2y = 0.$$

Характеристичне рівняння має дійсні різні корені:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_2 = -2. \end{array}\right.$$

Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння*

$$y_{зо} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

2. Права частина заданого рівняння має вигляд $f(x) = 2\cos 3x + 4\sin 3x$, тобто $P_n(x) = 2$, $(n = 0)$, $Q_m(x) = 4$, $(m = 0)$ – многочлени 0-го степеня, $\alpha = 0$, $\beta = 3$. Оскільки число $\alpha + \beta i = 3i \neq \lambda_{1,2}$, тобто серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ не має числа $\alpha + \beta i = 3i$, то $r = 0$. Тоді, відповідно до пункту **3а** шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{чн} = A\cos 3x + B\sin 3x.$$

Знайдемо

$$y'_{чн} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$

$$y''_{чн} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x,$$

і підставимо у вихідне рівняння:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x + 3(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x) + 2(A\cos 3x + B\sin 3x) =$$
$$= 2\cos 3x + 4\sin 3x,$$
$$(-9A + 9B + 2A)\cos 3x + (-9B - 9A + 2B)\sin 3x = 2\cos 3x + 4\sin 3x,$$
$$(-7A + 9B)\cos 3x + (-7B - 9A)\sin 3x = 2\cos 3x + 4\sin 3x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\cos 3x$ і $\sin 3x$:

$$\begin{array}{l|l} \cos 3x & -7A + 9B = 2, \\ \sin 3x & -9A - 7B = 4. \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = -\dfrac{5}{13}, \\ B = -\dfrac{1}{13}. \end{array} \right.$$

З урахуванням знайдених невизначених коефіцієнтів частинний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:

$$y_{чн} = -\frac{5}{13}\cos 3x - \frac{1}{13}\sin 3x.$$

3. Отже, з*агальний розв'язок* неоднорідного рівняння запишемо так:

$$y_{зн} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - \frac{5}{13}\cos 3x - \frac{1}{13}\sin 3x.$$

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + y = x\sin x.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}.$$

1. Для лінійного однорідного рівняння

$$y'' + y = 0,$$

що відповідає заданому неоднорідному, маємо таке характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i,$$

де $a = 0$ і $b = 1$. Отже, його *загальний розв'язок* має вигляд

$$y_{зо} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

2. Права частина заданого рівняння має вигляд $f(x) = x\sin x$, тобто $P_n(x) = 0,\ (n = 0)$ - многочлен 0-го степеня, $Q_m(x) = x,\ (m = 1)$ – многочлен 1-го степеня, тобто $l = 1$, $\alpha = 0,\ \beta = 1$. Оскільки число $\alpha + \beta i = i = \lambda_1$, тобто характеристичне рівняння має простий корінь $\lambda_1 = i$, який співпадає з числом $\alpha + \beta i = i$, то $r = 1$. Тоді, відповідно до пункту **3б** шукаємо частинний розв'язок у вигляді

$$y_{чн} = x\cdot\left((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x\right) = \left(Ax^2+Bx\right)\cos x + \left(Cx^2+Dx\right)\sin x .$$

Тоді

$$y'_{чн} = \left(2Ax + B + Cx^2 + Dx\right)\cos x + \left(2Cx + D - Ax^2 - Bx\right)\sin x ,$$

$$y''_{чн} = \left(2D + 2A - Ax^2 - Bx + 4Cx\right)\cos x + \left(2C - 2B - Cx^2 - Dx - 4Ax\right)\sin x .$$

Після підстановки в початкове рівняння матимемо рівність:

$$\left(2D + 2A - Ax^2 - Bx + 4Cx\right)\cos x + \left(2C - 2B - Cx^2 - Dx - 4Ax\right)\sin x +$$
$$+\left(Ax^2 + Bx\right)\cos x + \left(Cx^2 + Dx\right)\sin x = x\sin x,$$

$$\left(2D + 2A - Ax^2 - Bx + 4Cx + Ax^2 + Bx\right)\cos x +$$
$$+\left(2C - 2B - Cx^2 - Dx - 4Ax + Cx^2 + Dx\right)\sin x = x\sin x,$$
$$(2D + 2A + 4Cx)\cos x + (2C - 2B - 4Ax)\sin x = x\sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти в обох частинах тотожності при $x\cos x$, $x\sin x$, $\cos x$ і $\sin x$, складемо систему рівнянь для знаходження невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{array}{l|l} x\cos x & 4C = 0, \\ x\sin x & -4A = 1, \\ \cos x & 2D + 2A = 0, \\ \sin x & 2C - 2B = 0, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = -\dfrac{1}{4}, \\ D = \dfrac{1}{4}, \\ B = 0. \end{array}\right.$$

Отже, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* набуває вигляду:

$$y_{чн} = -\frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x.$$

3. Тоді *загальний розв'язок неоднорідного рівняння*

$$y_{зн} = C_1\cos x + C_2\sin x - \frac{1}{4}x^2\cos x + \frac{1}{4}x\sin x.$$

4. Нехай права частина рівняння (5.1) має загальний вигляд спеціальної правої частини (5.2)

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right),$$

тобто $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ - дійсні числа, $P_n(x)$, $Q_m(x)$ - многочлен степеня n і m відповідно. Тоді:

а) якщо $\alpha + \beta i \neq \lambda$, тобто $\lambda = \alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння (5.4) $(r = 0)$, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = e^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_l(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_l(x)\sin\beta x\right);$$

б) якщо $\alpha + \beta i = \lambda_{1,2,...,r}$, тобто $\lambda = \alpha + \beta i$ є коренем кратності r характеристичного рівняння (5.4), то частинний розв'язок неоднорідного рівняння (5.1) шукаємо у вигляді (5.3)

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}\left(\widetilde{P}_l(x)\cos\beta x + \widetilde{Q}_l(x)\sin\beta x\right),$$

де $\widetilde{P}_l(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$, $\widetilde{Q}_l(x) = B_0x^n + B_1x^{n-1} + \ldots + B_n$ - повні многочлени степеня $l = \max\{n, m\}$ з невизначеними коефіцієнтами.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 13y = e^x\cos x.$$

Розв'язання. Маємо загальний випадок лінійного неоднорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами та правою частиною спеціального вигляду. Його загальний розв'язок визначається формулою:

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}.$$

1. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$y'' - 4y' + 13y = 0,$$

для чого складемо характеристичне рівняння і визначимо його корені:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3i.$$

Маємо *загальний розв'язок однорідного рівняння*

$$y_{зо} = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

2. Права частина неоднорідного рівняння $f(x) = e^x\cos x$ є функцією спеціального вигляду, де $P_n(x) = 1$, $(n = 0)$, $Q_m(x) = 0$, $(m = 0)$ – многочлени 0-го степеня, $\alpha = 1$, $\beta = 1$. Оскільки число $\alpha + \beta i = 1 + i \neq \lambda_{1,2}$, тобто серед коренів характеристичного рівняння $\lambda_{1,2}$ не має числа $\alpha + \beta i = 1 + i$, то $r = 0$. Тоді частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння слід шукати відповідно до пункту **4а**, тобто за формулою (5.3), в якій $l = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$:

$$y_{чн} = e^x(A\cos x + B\sin x).$$

Тоді

$$y'_{чн} = e^x(A\cos x + B\sin x) + e^x(-A\sin x + B\cos x) = e^x((A + B)\cos x + (B - A)\sin x),$$

$$y''_{чн} = e^x((A + B)\cos x + (B - A)\sin x) + e^x(-(A + B)\sin x + (B - A)\cos x) =$$
$$= e^x(2B\cos x - 2A\sin x).$$

Після підстановки у вихідне рівняння скоротимо обидві частини рівності на спільний множник $e^x \neq 0$ і дістанемо:

$$2B\cos x - 2A\sin x - 4[((A+B)\cos x + (B-A)\sin x)] + 13(A\cos x + B\sin x) = \cos x,$$

$$(9A - 2B)\cos x + (2A + 9B)\sin x = \cos x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, знайдемо A і B:

$$\begin{array}{l|l} \cos x & 9A - 2B = 1, \\ \sin x & 2A + 9B = 0, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = \dfrac{9}{13}, \\ B = -\dfrac{2}{13}. \end{array} \right.$$

Таким чином, *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* набуває вигляду:

$$y_{\text{чн}} = e^x\left(\frac{9}{13}\cos x - \frac{2}{13}\sin x\right).$$

3. Отже, *загальний розв'язок* заданого рівняння має вигляд

$$y_{\text{зн}} = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + e^x\left(\frac{9}{13}\cos x - \frac{2}{13}\sin x\right).$$

Зауваження 2. Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами (5.1) дорівнює сумі декількох функцій спеціального вигляду (5.2), то знаходження частинного розв'язку такого рівняння робиться за допомогою *теореми про накладання розв'язків*. Сформулюємо її для випадку диференціального рівняння 2-го порядку.

Теорема *(про накладання розв'язків)*

Якщо права частина рівняння

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

має вигляд суми двох функцій спеціального вигляду (5.2):

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

а функції $y_{1\text{чн}}(x)$ та $y_{2\text{чн}}(x)$ - частинні розв'язки рівнянь

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_1(x),$$

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f_2(x)$$

відповідно, то функція $y_{\text{чн}}(x) = y_{1\text{чн}}(x) + y_{2\text{чн}}(x)$ буде частинним розв'язком даного рівняння.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' + 9y = chx.$$

<u>Розв'язання.</u> Права частина заданого рівняння може бути поданою у вигляді суми двох функцій спеціального вигляду:

$$f(x) = chx = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x} = f_1(x) + f_2(x).$$

Отже, при підборі частинного розв'язку слід скористатися *теоремою про накладання розв'язків.* Загальний розв'язок такого неоднорідного рівняння можна записати у вигляді

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{1чн} + y_{2чн}.$$

1. Запишемо однорідне рівняння

$$y'' + 9y = 0,$$

що відповідає даному неоднорідному складемо. Складемо характеристичне рівняння і знайдемо його корені:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 3i.,$$

Отже, *загальний розв'язок однорідного рівняння* буде таким:

$$y_{зо} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

2. Частинний розв'язок $y_{1чн}$, що відповідає першому доданку правої частини неоднорідного рівняння – добуток многочлена $P_n(x) = \frac{1}{2}$ нульового степеня на експоненту, шукатимемо у вигляді

$$y_{1чн} = Ae^{x},$$

оскільки $\alpha + \beta i = 1$ не є коренем $\lambda_{1,2}$ характеристичного рівняння $(r = 0)$.

Продиференціюємо передбачуваний частинний розв'язок $y_{1чн}$:

$$y'_{1чн} = Ae^{x}, \qquad y''_{1чн} = Ae^{x}$$

і підставимо в задане неоднорідне рівняння, обмежившись у правій частині лише функцією $f_1(x)$:

$$Ae^{x} + 9Ae^{x} = \frac{1}{2}e^{x},$$

звідки

$$10Ae^{x} = \frac{1}{2}e^{x} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{20}.$$

Отже, перший *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* матиме вигляд

$$y_{1чн} = \frac{1}{20}e^{x}.$$

Другий доданок правої частини за структурою має такий самий вигляд, як і перший з тією лише різницею, що $\alpha + \beta i = -1$. Оскільки серед коренів характеристичного рівняння такого значення не має $(r = 0)$, частинний розв'язок $y_{2чн}$ слід шукати у вигляді

$$y_{2чн} = Be^{-x}.$$

Диференціюємо цей частинний розв'язок з невизначеним коефіцієнтом:

$$y'_{2чн} = -Be^{-x}, \qquad y''_{2чн} = Be^{-x}$$

і підставляємо в задане неоднорідне рівняння, розглядаючи його праву частину тепер уже лише як функцією $f_2(x)$:

$$Be^{-x} + 9Be^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x}, \qquad \text{звідки}$$

$$10Be^{x} = \frac{1}{2}e^{x} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{20}.$$

У результаті знаходимо другий *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*:

$$y_{2чн} = \frac{1}{20}e^{-x}.$$

звідки

$$10Ae^{x} = \frac{1}{2}e^{x} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{20}.$$

Отже, перший *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* матиме вигляд

$$y_{1чн} = \frac{1}{20}e^{x}.$$

Другий доданок правої частини за структурою має такий самий вигляд, як і перший з тією лише різницею, що $\alpha + \beta i = -1$. Оскільки серед коренів характеристичного рівняння такого значення не має $(r = 0)$, частинний розв'язок $y_{2чн}$ слід шукати у вигляді

$$y_{2чн} = Be^{-x}.$$

Диференціюємо цей частинний розв'язок з невизначеним коефіцієнтом:

$$y'_{2чн} = -Be^{-x}, \qquad y''_{2чн} = Be^{-x}$$

і підставляємо в задане неоднорідне рівняння, розглядаючи його праву частину тепер уже лише як функцією $f_2(x)$:

$$Be^{-x} + 9Be^{-x} = \frac{1}{2}e^{-x},$$

звідки
$$10Be^{x} = \frac{1}{2}e^{x} \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{1}{20}.$$

У результаті знаходимо другий *частинний розв'язок неоднорідного рівняння*:

$$y_{2чн} = \frac{1}{20}e^{-x}.$$

3. Отже, *загальний розв'язок* заданого неоднорідного рівняння набуває вигляду

$$y_{зн} = y_{зо} + y_{1чн} + y_{2чн} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{20}e^{x} + \frac{1}{20}e^{-x}$$

або
$$y_{зн} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{10}chx.$$