1.3. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння, що до них зводяться

Означення. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною* функцією *n–го* виміру (n – натуральне число), якщо при будь-якому λ справедлива тотожність:

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^n f(x, y). \tag{3.1}$$

Наприклад, функція $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ є однорідною функцією *2–го* виміру, оскільки

$$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 - (\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2 (x^2 + y^2 - xy) = \lambda^2 f(x, y).$$

Покладаючи в (3.1) $\lambda = \dfrac{1}{x}$, отримаємо

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^n} f(x, y), \qquad \Rightarrow \qquad f(x, y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Тобто, однорідну функцією *n–го* виміру можна подати у вигляді

$$f(x, y) = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{3.2}$$

Означення. Диференціальне рівняння 1–го порядку вигляду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{3.3}$$

називається однорідним, якщо $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ є однорідними функціями <u>однакового</u> виміру.

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = f(x, y) \tag{3.4}$$

називається однорідним відносно своїх змінних (шуканої функції y і аргументу x), якщо $f(x, y)$ є однорідною функцією <u>нульового</u> виміру відносно y та x.

2020-3-14 10:52

Однорідні рівняння (3.3) або (3.4), враховуючи (3.2), можуть бути перетворені до рівняння, права частина якого є функцією відношення $\frac{y}{x}$, тобто

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (3.5)$$

Однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними за допомогою підстановки $\frac{y}{x} = u$, де $u = u(x)$ - нова шукана функція. Тоді

$$y = ux \quad \Rightarrow \quad y' = u'x + u.$$

Підставляючи y та y' в рівняння (3.5), отримаємо

$$u'x + u = \varphi(u), \qquad \text{або} \qquad x\frac{du}{dx} = \varphi(u) - u,$$

звідки

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}, \qquad \varphi(u) \neq u.$$

Інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок (інтеграл) відносно функції u:

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Підставляючи після інтегрування замість u відношення $\frac{y}{x}$, отримаємо загальний розв'язок (інтеграл) даного однорідного рівняння.

Зауваження. При розв'язанні однорідних рівнянь не обов'язково зводити їх до вигляду (3.5). Можна зразу робити підстановку $y = ux$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y - xy' = y\ln\frac{x}{y}$.

Розв'язання. Розв'яжемо дане рівняння відносно похідної:

2020-3-14 10:54

$$xy' = y - y\ln\frac{x}{y} \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{y}{x} - \frac{y}{x}\ln\frac{x}{y} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Одержали однорідне рівняння вигляду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Для його розв'язання введемо нову функцію, зробивши заміну

$$\frac{y}{x} = u(x) \quad\Rightarrow\quad y = ux, \qquad y' = u'x + u.$$

У результаті цієї заміни одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x + u = u - u\ln u \quad\Rightarrow\quad x\frac{du}{dx} = u\ln u.$$

Відокремлюємо змінні, поділивши обидві частини на $xu\ln u$

$$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$$

та інтегруємо

$$\int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x} + \ln C \quad\Rightarrow\quad \ln|\ln u| = \ln|x| + \ln C \quad\Rightarrow\quad \ln|\ln u| = \ln C|x|.$$

Потенціюючи два рази, отримаємо загальний розв'язок відносно функції u:

$$\ln u = \pm Cx \quad\Rightarrow\quad u = e^{C_1 x}.$$

Виконуючи обернену заміну $u = \frac{y}{x}$, отримаємо *загальний розв'язок* рівняння:

$$\frac{y}{x} = e^{C_1 x} \quad\Rightarrow\quad y = xe^{C_1 x}.$$

1.4. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку

Означення. *Лінійним диференціальним рівняння 1–го порядку* називається рівняння лінійне (першого степеня) відносно функції y та її похідної y' вигляду:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{4.1}$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - визначені і неперервні на деякому проміжку функції.

Якщо $Q(x) \neq 0$, то рівняння (4.1) називається *лінійним неоднорідним*.

Якщо $Q(x) = 0$, то рівняння

$$y' + P(x)y = 0 \tag{4.2}$$

називається *лінійним однорідним*, що відповідає даному неоднорідному рівнянню (4.1).

Рівняння (4.2) є рівнянням з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)y.$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, знайдемо його загальний розв’язок

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|,$$

$$y(x) = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{4.3}$$

Загальний розв’язок лінійного рівняння (4.1) можна отримати методом Бернуллі або методом варіації довільної сталої (методом Лагранжа).

Метод Бернуллі

Метод Бернуллі полягає в тому, що розв'язок рівняння (4.1) шукаємо у вигляді добутку двох функцій

$$y = u \cdot v, \tag{4.4}$$

де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - невідомі функції, одна з яких довільна, але не рівна нулю.

(Дійсно, кожну функцію можна записати у вигляді

$$y(x) = \frac{y(x)}{v(x)} v(x) = u(x) \cdot v(x), \text{ де } v(x) \neq 0 \text{).}$$

Знаходимо похідну

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставляючи вирази y та y' в рівняння (4.1), отримаємо:

$$u'v + uv' + P(x) \cdot uv = Q(x) \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x) \quad (*).$$

Користуючись довільністю у виборі функції $v(x)$, підберемо її так, щоб вираз у дужках дорівнював нулю,тобто

$$v' + P(x)v = 0.$$

Тоді рівняння $(*)$ буде рівносильне системі двох рівнянь

$$\begin{cases} v' + P(x)v = 0, \\ u'v = Q(x). \end{cases}$$

Перше рівняння системи є лінійним однорідним вигляду (4.2) і його загальний розв'язок :

$$v = C_1 e^{-\int P(x)dx}, \qquad C_1 \neq 0.$$

В силу довільності вибору функції v, виберемо з цього загального розв'язку який-небудь частинний розв'язок, поклавши, наприклад, $C_1 = 1$. Тоді

$$v = e^{-\int P(x)dx}.$$

Підставляючи отримане значення функції v в друге рівняння системи, отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними для функції $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}e^{-\int P(x)dx}=Q(x).$$

Відокремлюючи змінні та інтегруючи, отримаємо його загальний розв'язок:

$$du=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx \quad \Rightarrow \quad u=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C.$$

Врешті, підставляючи знайдені значення функцій u і v в рівняння (4.4), отримаємо *загальний розв'язок* лінійного диференціального рівняння (4.1):

$$y(x)=u\cdot v=\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int P(x)dx}.$$

Метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа)

Метод Лагранжа полягає в тому, що загальний розв'язок рівняння (4.1) шукаємо у вигляді розв'язку відповідного однорідного рівняння, в якому сталу вважають функцією.

Спочатку записуємо лінійне однорідне рівняння (4.2), відповідне даному неоднорідному рівнянню (4.1):

$$y'+P(x)y=0,$$

інтегруючи, отримаємо його загальний розв'язок, який дається формулою (4.3):

$$y(x)=Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Далі записуємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) у такому ж вигляді (4.3), вважаючи довільну сталу деякою диференційовною функцією:

$$y(x)=C(x)e^{-\int P(x)dx}. \tag{4.5}$$

Знаходимо похідну

$$y'(x) = C'(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x)).$$

Підставляючи вирази $y(x)$ та $y'(x)$ в рівняння (4.1), отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними відносно функції $C(x)$:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x),$$

інтегруючи яке, знаходимо:

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + \overline{C}.$$

Підставляючи знайдену функцію $C(x)$ у вираз (4.5) дістаємо *загальний розв'язок* лінійного неоднорідного рівняння (4.1):

$$y(x) = \left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + \overline{C}\right) \cdot e^{-\int P(x)dx}, \tag{4.6}$$

який повністю збігається з розв'язком, отриманим методом Бернуллі.

Зауваження 1. Розкривши у формулі (4.6) дужки

$$y(x) = \overline{C}e^{-\int P(x)dx} + e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx,$$

можна помітити, що загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) дорівнює сумі загального розв'язку $y_{зо}$ відповідного однорідного рівняння (4.2) і частинного розв'язку $y_{чн}$ даного неоднорідного рівняння: $y_{зн} = y_{зо} + y_{чн}$.

Зауваження 2. При розв'язуванні лінійних диференціальних рівнянь методом Бернуллі або методом Лагранжа слід <u>використовувати наведені алгоритми</u>, а не отримані кінцеві формули.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' - yctgx = \frac{1}{\sin x}.$$

Розв'язання. Дане рівняння має вигляд (4.1), тобто воно є лінійним відносно шуканої функції y та її похідної y', при цьому $P(x) = ctgx,\ Q(x) = \frac{1}{\sin x}$.

Для його розв'язання застосуємо метод Бернуллі, тобто загальний розв'язок шукатимемо у вигляді

$$y = uv.$$

Звідси

$$y' = u'v + uv'.$$

Підставляємо y та y' у вихідне рівняння

$$u'v + uv' - uvctgx = \frac{1}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad u'v + u(v' - vctgx) = \frac{1}{\sin x}.$$

Для визначення невідомих функцій $u(x)$ і $v(x)$ розіб'ємо отримане рівняння на два рівняння:

$$\begin{cases} v' - vctgx = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Розв'язуємо перше рівняння системи, як рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dv}{dx} = vctgx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int ctgxdx + \ln|C_1| \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|\sin x| + \ln|C_1|,$$

звідки

$$\ln|v| = \ln|C_1 \sin x| \quad \Rightarrow \quad v = C\sin x,\ \text{де}\ C = \pm C$$

Оскільки в даному рівнянні досить знайти який-небудь *частинний розв'язок*, то, для спрощення подальшого розв'язання, покладемо $C=1$.

(Надалі, при розв'язанні першого рівняння системи, постійну інтегрування записувати не будемо, зразу шукаючи його найпростіший *частинний розв'язок*, який, як правило, можна отримати при $C=1$ або $C=0$).

Тоді

$$v=\sin x.$$

Підставляємо функцію $v(x)=\sin x$ у друге рівняння системи і знайдемо функцію $u(x)$:

$$\frac{du}{dx}\sin x=\frac{1}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad du=\frac{dx}{\sin^2 x},$$

звідки

$$\int du=\int\frac{dx}{\sin^2 x}+C \quad \Rightarrow \quad u=-ctgx+C.$$

Отже, загальний розв'язок заданого рівняння

$$y=uv=(-ctgx+C)\sin x=-\cos x+C\sin x.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початкову умову (*задача Коші*):

$$y'+2xy=3x^2e^{-x^2}, \qquad y(0)=-1.$$

Розв'язання. Маємо лінійне рівняння відносно функції y та її похідної y'. Застосуємо метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа). Спочатку знайдемо *загальний розв'язок однорідного рівняння*, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню:

$$y'+2xy=0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2xdx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -2\int xdx + \ln|C|,$$

звідси

$$\ln|y| - \ln|C| = -x^2 \quad \Rightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{C} = e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y = Ce^{-x^2}.$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$y = C(x)e^{-x^2}, \qquad (*)$$

вважаючи довільну сталу функцією змінної x. Тоді

$$y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x).$$

Підставляючи y та y' у задане рівняння, отримаємо:

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 3x^2e^{-x^2}.$$

Після скорочення, маємо:

$$C'(x)e^{-x^2} = 3x^2e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x^3 + \overline{C}.$$

Підставивши знайдене значення $C(x)$ у вираз $(*)$, отримаємо *загальний розв'язок неоднорідного лінійного рівняння*:

$$y = \left(x^3 + \overline{C}\right)e^{-x^2} \quad \Rightarrow \quad y_{зн} = y_{зо} + y_{чн} = \overline{C}e^{-x^2} + x^3e^{-x^2}.$$

В даному випадку $y_{зо} = \overline{C}e^{-x^2}$ - загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, $y_{чн} = x^3e^{-x^2}$ - частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння.

Тепер розв'яжемо задачу Коші, тобто знайдемо частинний розв'язок даного рівняння, який відповідає заданій початковій умові.

Підставивши в загальний розв'язок початкову умову $y(0) = -1$, знайдемо значення сталої $\overline{C}$:

$$-1 = \left(0 + \overline{C}\right)e^0 \quad \Rightarrow \quad \overline{C} = -1.$$

Отже, *розв'язком задачі Коші* є функція

$$y = \left(x^3 - 1\right)e^{-x^2}.$$

2020-3-14 11:13

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$(x+y)y' = 1.$$

Розв'язання. Дане рівняння не є лінійним відносно функції $y(x)$. Оскільки містить добуток yy' і його не можна подати у вигляді (4.1). Але воно може бути лінійним відносно функції $x(y)$. Перевіримо це, перетворивши це рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = (x+y) \quad \Rightarrow \quad x' - x = y.$$

Дійсно, отримали *лінійне рівняння відносно функції* $x(y)$. Розв'яжемо його методом Лагранжа.

Знайдемо спочатку *загальний розв'язок однорідного рівняння*, що відповідає заданому неоднорідному рівнянню:

$$x' - x = 0.$$

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\frac{dx}{dy} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = dy.$$

Інтегруючи, знаходимо *загальний розв'язок однорідного рівняння*

$$\ln|x| = y + \ln C \quad \Rightarrow \quad x = Ce^{y}.$$

Тоді, загальний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді

$$x = C(y)e^{y}. \qquad (*)$$

Диференціюючи вираз $(*)$, знайдемо

$$x' = C'(y)e^{y} + C(y)e^{y}.$$

Підставляючи y та y' у задане рівняння, матимемо:

$$C'(y)e^{y} + C(y)e^{y} - C(y)e^{y} = y \quad \Rightarrow \quad C'(y)e^{y} = y.$$

Звідси випливає:

$$C'(y) = ye^{-y} \quad \Rightarrow \quad dC(y) = ye^{-y}dy \quad \Rightarrow \quad C(y) = \int ye^{-y}dy + C.$$

Використовуючи метод інтегрування частинами, отримаємо:

$$C(y) = -ye^{-y} - e^{-y} + C \quad \Rightarrow \quad C(y) = -e^{-y}(y+1) + C.$$

Підставляючи знайдену функцію $C(y)$ у вираз $(*)$, отримаємо *загальний розв'язок неоднорідного рівняння*:

$$x = \left(C - e^{-y}(y+1)\right)e^{y} \quad \Rightarrow \quad x_{зн} = x_{зо} + x_{чн} = Ce^{y} - (y+1).$$

1.5. Диференціальне рівняння Бернуллі

Означення. *Рівнянням Бернуллі* називається диференціальне рівняння 1-го порядку вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{5.1}$$

де $n \in R, n \neq 0, n \neq 1$, а $P(x)$ і $Q(x)$ - визначені і неперервні на деякому проміжку функції.

Якщо $n = 0$, то рівняння (5.1) є лінійним неоднорідним рівнянням, якщо $n = 1$, то рівняння (5.1) є лінійним однорідним рівнянням. Для інших дійсних значень показника n рівняння Бернуллі можна звести до лінійного диференціального рівняння, за допомогою введення нової функції $z = z(x)$.

Для цього, спочатку поділимо рівняння (5.1) на y^n ($y \neq 0$).

Отримаємо

$$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x) \qquad (**).$$

Зробимо заміну

$z = y^{1-n}$, де $z = z(x)$ - нова невідома функція.

Звідси

$$z' = \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}y' \qquad \Rightarrow \qquad y^{-n}y' = \frac{z'}{1-n}.$$

Перейдемо в рівнянні $(**)$ до змінної z:

$$\frac{1}{1-n}z' + P(x)z = Q(x) \qquad \Rightarrow \qquad z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Отримане рівняння є *лінійним диференціальним рівнянням* відносно функції $z(x)$, для якого можна застосувати або метод Бернуллі, або метод Лагранжа.

Зауваження 1. Очевидно, що $y = 0$ є розв'язком рівняння Бернуллі, коли $n > 0$.

Зауваження 2. Розв'язок рівняння Бернуллі можна шукати безпосередньо методом Бернуллі у вигляді $y = uv$, не зводячи його попередньо до лінійного рівняння.

2020-3-14 11:18