3.2. Системи лінійних диференціальних рівнянь

Означення. Нормальна система диференціальних рівнянь називається *лінійною*, якщо кожне рівняння системи лінійне відносно шуканої функції та їхніх похідних:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + f_1(x), \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \ldots + a_{2n}(x)y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

де функції $a_{ij}(x)$ і $f_i(x)$ $(i, j = 1,2,\ldots,n)$ визначені й неперервні при $x \in (a,b)$.

3.3. Інтегрування нормальних систем

Одним з основних методів інтегрування нормальної системи диференціальних рівнянь є *метод виключення*. Суть цього методу полягає в послідовному виключенню невідомих функцій з рівнянь системи, внаслідок чого система зводиться до одного диференціального рівняння n-го порядку від однієї невідомої функції.

Розглянемо цей метод на прикладі нормальної *системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь* 1-го порядку вигляду:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1 x + a_2 y, \\ \dfrac{dy}{dt} = b_1 x + b_2 y, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_t' = a_1 x + a_2 y, \\ y_t' = b_1 x + b_2 y, \end{cases} \tag{3.1}$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$ - диференційовані функції незалежної змінної t, а коефіцієнти a_i і b_i - сталі, але можуть бути і функціями змінної t.

1. Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною t:

$$x_{tt}'' = a_1 x_t' + a_2 y_t'.$$

2. Підставимо в цю рівність вираз y_t' із другого рівняння системи:

$$x_{tt}'' = a_1 x_t' + a_2 (b_1 x + b_2 y).$$

3. Замінимо функцію y її виразом з першого рівняння системи, тобто

$$y = \frac{1}{a_2}\left(x'_t - a_1 x\right). \qquad (*)$$

Тоді $$x''_{tt} = a_1 x'_t + a_2\left(b_1 x + b_2 \frac{1}{a_2}\left(x'_t - a_1 x\right)\right)$$ Спростимо отриманий вираз

$$x''_{tt} = a_1 x'_t + a_2 b_1 x + b_2 x'_t - b_2 a_1 x \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} = \left(a_1 + b_2\right)x'_t + \left(a_2 b_1 - b_2 a_1\right)x,$$

$$x''_{tt} - \left(a_1 + b_2\right)x'_t - \left(a_2 b_1 - b_2 a_1\right)x = 0,$$ або

$$x''_{tt} + A x'_t + B x = 0,$$

де $A = -\left(a_1 + b_2\right)$, а $B = -\left(a_2 b_1 - b_2 a_1\right)$.

4. Одержали *лінійне однорідне* рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$. Розв'язавши це рівняння, отримаємо *загальний розв'язок відносно функції* $x(t)$:

$$x(t) = \varphi(t, C_1, C_2).$$

5. Для знаходження функції $y(t)$, підставимо в рівняння $(*)$ знайдену функцію $x(t)$ та її похідну $x'(t)$.

   В результаті отримаємо *загальний розв'язок відносно функції* $y(t)$:

$$y(t) = \psi(t, C_1, C_2).$$

Сукупність двох знайдених функцій є *загальним розв'язком заданої системи*: $\quad x(t) = \varphi(t, C_1, C_2), \quad y(t) = \psi(t, C_1, C_2).$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок системи лінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x + 5y. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо *однорідну систему* двох диференціальних рівнянь відносно шуканих функцій $x(t)$ і $y(t)$. Застосуємо до її розв'язання метод виключення та зведемо її до одного диференціального рівняння 2-го порядку.

Перепишемо цю систему в більш компактному вигляді:

$$\begin{cases} x'_t = 5x + 4y, \\ y'_t = 4x + 5y. \end{cases}$$

1. Продиференціюємо перше рівняння системи за змінною t:

$$x''_{tt} = 5x'_t + 4y'_t.$$

2. Підставляючи в цю рівність вираз y'_t із другого рівняння системи, маємо

$$x''_{tt} = 5x'_t + 4(4x + 5y) \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} = 5x'_t + 16x + 20y.$$

3. Нарешті замінюючи функцію y її виразом з першого рівняння системи

$$y = \frac{1}{4}(x'_t - 5x) \qquad (*)$$

дістанемо

$$x''_{tt} = 5x'_t + 16x + 20\frac{1}{4}(x'_t - 5x) \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} = 5x'_t + 16x + 5x'_t - 25x,$$

$$x''_{tt} = 10x'_t - 9x, \quad \Rightarrow \quad x''_{tt} - 10x'_t + 9x = 0$$

- *лінійне однорідне* рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $x(t)$.

Для його розв'язання складемо і розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 = 9. \end{array}\right.$$

Отже, частинні лінійно незалежні розв'язки (фундаментальна система розв'язків) - $x_1(t) = e^x$ і $x_2(t) = e^{9x}$, а загальний розв'язок

$$x(t) = C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

4. Щоб знайти $y(t)$, підставимо в рівняння $(*)$ знайдену функцію $x(t)$ та її похідну:

$$x'(t) = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}.$$

Маємо:

$$y(t) = \frac{1}{4}\left(C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} - 5\left(C_1 e^x + C_2 e^{9x}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(C_1 e^x + 9C_2 e^{9x} - 5C_1 e^x - 5C_2 e^{9x}\right) =$$

$$= -C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Сукупність двох знайдених функцій дає нам *загальний розв'язок заданої системи*:

$$x(t) = C_1 e^x + C_2 e^{9x}, \qquad y(t) = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь, що задовольняє початкові умови (*задача Коші*):

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y - 4z = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + y - 3z = 3x, \end{cases} \qquad y(0) = 0, \qquad z(0) = 0.$$

<u>Розв'язання.</u> Щоб знайти частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь, необхідно спочатку знайти її загальний розв'язок і потім домагатися, щоб він задовольняв початкові умови.

Задано *неоднорідну систему* лінійних диференціальних рівнянь, де $y(x)$ і $z(x)$ - шукані функції. Застосуємо до її розв'язання метод виключення та зведемо її до одного диференціального рівняння 2-го порядку.

1. Диференціюємо перше рівняння системи за змінною x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4\frac{dz}{dx} = 0.$$

2. Підставимо в цю рівність вираз $\dfrac{dz}{dx}$ із другого рівняння системи:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4(3x - y + 3z) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 12x + 4y - 12z = 0.$$

3. Замінюючи функцію z її виразом з першого рівняння системи

$$z = \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx} + 2y\right) \qquad (*)$$

отримаємо *лінійне неоднорідне* рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами відносно функції $y(x)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 12x + 4y - 12\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx} + 2y\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 12x + 3. \ (**)$$

4. Дотримуючись схеми розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь (див. пункт **2.5.**) знайдемо спочатку загальний розв'язок $y_{зо}$ відповідного однорідного рівняння

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0,$$

якому відповідає характеристичне рівняння з дійсними різними коренями:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \lambda_1 = 2, \\ \lambda_2 = -1. \end{array}\right.$$

Отже,

$$y_{зо} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$$

Тепер знайдемо частинний розв'язок $y_{чн}$ неоднорідного рівняння з правою частиною спеціального вигляду. Оскільки $P_n(x) = 12x + 3, (n = 1)$ і число $\alpha + \beta i = 0 \neq \lambda_{1,2}$, тобто $r = 0$, то функцію $y_{чн}$ шукаємо у вигляді

$$y_{чн} = Ax + B.$$

Тоді

$$\frac{dy_{чн}}{dx} = A, \qquad \frac{d^2 y_{чн}}{dx^2} = 0.$$

Підставляючи $y_{чн}$ й знайдені похідні в неоднорідне рівняння, матимемо таке співвідношення для визначення коефіцієнтів A і B:

$$-A - 2(Ax + B) = 12x + 3 \quad \Rightarrow \quad -2Ax - A - 2B = 12x + 3,$$

звідки

$$\begin{array}{c|l} x & -2A = 12, \\ x^0 & -A - 2B = 3, \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = -6, \\ B = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Отже,

$$y_{чн} = -6x + \frac{3}{2}.$$

Таким чином, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (**) має вигляд

$$y(x) = y_{зо} + y_{чн} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 6x + \frac{3}{2}.$$

5. Тепер визначимо функцію $z(x)$. Для цього підставимо у вираз (*) функцію $y(x)$ та її похідну:

$$\frac{dy}{dx} = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - 6.$$

В результаті маємо:

$$z(x)=\frac{1}{4}\left(2C_1e^{2x}-C_2e^{-x}-6+2\left(C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-6x+\frac{3}{2}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(4C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-12x-3\right),$$

$$z(x)=C_1e^{2x}+\frac{1}{4}C_2e^{-x}-3x-\frac{3}{4}.$$

Таким чином, *загальний розв'язок заданої системи*:

$$y(x)=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-6x+\frac{3}{2},\qquad z(x)=C_1e^{2x}+\frac{1}{4}C_2e^{-x}-3x-\frac{3}{4}.$$

6. Щоб знайти частинний розв'язок, скористаємось початковими умовами:

$$\begin{cases} y(0)=0, \\ z(0)=0, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} 0=C_1+C_2+\dfrac{3}{2}, \\ 0=C_1+\dfrac{1}{4}C_2-\dfrac{3}{4}, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} C_1=\dfrac{3}{2}, \\ C_2=-3. \end{cases}$$

Підставивши C_1 і C_2 у загальний розв'язок системи, матимемо шуканий *частинний розв'язок*:

$$y(x)=\frac{3}{2}e^{2x}-3e^{-x}-6x+\frac{3}{2},\qquad z(x)=\frac{3}{2}e^{2x}-\frac{3}{4}C_2e^{-x}-3x-\frac{3}{4}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. **Знайти загальний розв'язок лінійної системи диференціальних рівнянь:**

1.1. $\begin{cases} x_t'=-y, \\ y_t'=-4x. \end{cases}$ **1.2.** $\begin{cases} x_t'=x-y, \\ y_t'=-4x+y. \end{cases}$

2. **Знайти частинний розв'язок системи, що задовольняє початкові умови:**

2.9. $\begin{cases} x_t'=2x+y, \\ y_t'=3x+4y, \end{cases}$ $x(0)=1,\quad y(0)=3.$

Відповіді

1.1. $x=C_1e^{-2t}+C_2e^{2t},\quad y=2C_1e^{-2t}-2C_2e^{2t}.$

1.2. $x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t},\quad y=2C_1e^{-t}-2C_2e^{3t}.$ **2.1.** $x=e^{5t},\quad y=3e^{5t}.$