Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $x^2 y^2 y' + 1 = y$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними типу (2.1). Скориставшись зауваженням 2, зведемо його до вигляду (2.2):

$$x^2 y^2 dy = (y-1)dx.$$

Поділимо обидві частини рівняння на добуток $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{(y-1)}dy = \frac{1}{x^2}dx.$$

Отримали рівняння з відокремленими змінними. Інтегруємо обидві частини рівняння:

$$\int \frac{y^2}{(y-1)}dy = \int \frac{1}{x^2}dx + C.$$

Звідси отримаємо *загальний інтеграл*

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C.$$

При діленні на $x^2(y-1)$ могли бути загублені розв'язки $x=0$ та $(y-1)=0$, тобто $y=1$. Безпосередньою підстановкою в вихідне рівняння впевнюємось, що $y=1$ - розв'язок рівняння, а $x=0$ - ні. Оскільки розв'язок $y=1$ не може бути отриманий із загального розв'язку при жодному значенні довільної сталої C, то він є *особливим*.

2020-3-14 09:21

1.2. Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними

Означення. *Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними* називається рівняння 1-го порядку вигляду

$$y' = f(x) \cdot g(x) \tag{2.1}$$

або

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \tag{2.2}$$

якщо $P(x, y) = M_1(x)N_1(y)$ і $Q(x, y) = M_2(x)N_2(y)$.

Особливість цього рівняння у тому, що коефіцієнти при диференціалах розкладаються на множники, які залежать лише від однієї змінної.

Поділимо обидві частини рівняння (2.2) на добуток $N_1(y) \cdot M_2(x)$, виключаючи з розгляду точки, в яких $N_1(y) = 0$ та $M_2(x) = 0$:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Одержали рівняння, у якого змінні відокремлені, тобто коефіцієнт при dx залежить тільки від x , а коефіцієнт при dy - тільки від y. Таке рівняння називається рівнянням з *відокремленими змінними*.

Почленно інтегруючи це рівняння, знайдемо загальний інтеграл рівняння (2.2):

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Зауваження 1. При почленному діленні диференціального рівняння на $N_1(y) \cdot M_2(x)$ можуть бути загублені деякі розв'язки. Тому слід окремо розв'язати рівняння $N_1(y) = 0$ та $M_2(x) = 0$ і встановити ті розв'язки диференціального рівняння, які не можуть бути отримані із загального розв'язку, - *особливі розв'язки.*

Зауваження 2. Рівняння (2.1) зводиться до рівняння з відокремленими змінними, якщо покласти $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Приклад 2. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$(y - xy)dx + (x + xy)dy = 0.$$

Розв'язання. Винесемо спільні множники в обох дужках:

$$y(1 - x)dx + x(1 + y)dy = 0.$$

Отримане рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Поділимо його почленно на $xy \neq 0$ і отримаємо рівняння з відокремленими змінними:

$$\frac{1 - x}{x}dx + \frac{1 + y}{y}dy = 0.$$

Виконаємо інтегрування:

$$\int \frac{1 - x}{x}dx + \int \frac{1 + y}{y}dy = C,$$

$$\ln|x| - x + \ln|y| + y = C \quad \Rightarrow \quad \ln|xy| + \ln e^{y-x} = \ln|C|.$$

Оскільки стала інтегрування – довільна, то для спрощення виразу при наступних перетвореннях її можна записати у вигляді $\ln|C|$. Тоді:

$$\ln\left(|xy|e^{y-x}\right) = \ln|C| \quad \Rightarrow \quad |xy|e^{y-x} = |C|.$$

Звідси знаходимо *загальний інтеграл* рівняння:

$$xye^{y-x} = \pm C \quad \Rightarrow \quad xye^{y-x} = C_1 \quad (C_1 = \pm C).$$

При розв'язанні рівняння було припущено, що $x \neq 0$, $y \neq 0$. Проте функції $x = 0$ та $y = 0$ також є розв'язками вихідного рівняння, що легко перевірити

безпосередньою підстановкою. З іншого боку їх можна отримати із загального інтеграла при $C = 0$. Отже, $x = 0$ і $y = 0$ - *частинні розв'язки* рівняння.

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$y'ctgx = -y,$$

який задовольняє початкову умову $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ (*задача Коші*).

Розв'язання. Покладаючи $y' = \frac{dy}{dx}$, отримаємо

$$ydx + ctgxdy = 0.$$

Відокремлюємо змінні

$$tgxdx + \frac{dy}{y} = 0$$

та зінтегруємо

$$\int \frac{dy}{y} = -\int tgxdx + \ln C \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln C.$$

Звідси знаходимо *загальний розв'язок* рівняння:

$$\ln|y| = \ln C|\cos x| \quad \Rightarrow \quad y = C \cdot \cos x.$$

Підставляємо в загальний розв'язок початкову умову $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $y_0 = -1$ знайдемо довільну сталу C:

$$-1 = C \cdot \cos\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad C = -2.$$

Отже, при цьому значенні C із загального розв'язку отримаємо *частинни* *розв'язок*

$$y = -2\cos x,$$

який задовольняє заданій початкову умову (інтегральна крива проходить чере точку $M_0(\pi/3, -1)$).

2020-3-14 09:24

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти загальний розв'язок:

1.1. $(y-1)^2dx+(1-x)^3dy=0.$

1.2. $x\sqrt{9-y^2}dx-y\left(4+x^2\right)dy=0.$

1.3. $\cos x\cos y dx-\sin x\sin y dy=0.$

1.4. $\ln x\sin^3 y dx-x\cos y dy=0.$

1.5. $\left(xy^2-y^2\right)dx-\left(x^2y+x^2\right)dy=0.$

1.6. $yy'+x=1.$

1.7. $\left(\sqrt{xy}-2\sqrt{x}\right)y'-y=0.$

1.8. $(1+y')e^y+1=0.$

1.9. $\left(1+x^2\right)y'=xy-y\sqrt{1+x^2}.$

1.10. $y'=\dfrac{y\ln y}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}.$

2. Знайти частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову:

2.1. $3x\sqrt[3]{y}dx+\left(1-x^2\right)dy=0, \quad y(0)=0.$

2.2. $ydx-\left(4+x^2\right)\ln y dy=0, \quad y(2)=1.$

2.3. $\sin^2 x\cos^2 y dx-\cos^2 x dy=0, \quad y(0)=\pi/4.$

2.4. $y'e^{-x}=x-1, \quad y(1)=-e.$

2.5. $y'\left(x+\sqrt{x}\right)=\sqrt{1-y}, \quad y(0)=1.$

Відповіді

1.1. $\dfrac{1}{(y-1)}+\dfrac{1}{2(x-1)^2}=C.$ **1.2.** $\ln\left(4+x^2\right)+\sqrt{9-y^2}=C.$ **1.3.** $\sin x\cos y=C.$

1.4. $\ln^2 x-ctg^2 y=C.$ **1.5.** $\ln|xy|+\dfrac{y-x}{xy}=C.$ **1.6.** $(x-1)^2+y^2=C.$

1.7. $y-\sqrt{x}+C=\ln|y|.$ **1.8.** $\left(e^y+1\right)e^x=C.$ **1.9.** $y=\dfrac{C\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$

1.10. $y=e^{C\arcsin x}.$ **2.1.** $y=\sqrt{\ln^3\left|1-x^2\right|}.$ **2.2.** $arctg(x/2)=\ln^2 y+\pi/4.$

2.3. $tgy=1-x+tgx.$ **2.4.** $y=e^x(x-2).$ **2.5.** $\ln\left(\sqrt{x}+1\right)=-\sqrt{1-y}.$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\left(x^2+y^2\right)dx-2xydy=0$.

Розв'язання. Розв'язуючи дане рівняння відносно похідної

$$\frac{dy}{dx}=y'=\frac{x^2+y^2}{2xy}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\frac{y}{x}}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

встановлюємо, що вона є функцією тільки відношення $\frac{y}{x}$, тобто дане рівняння є однорідним.

Введемо нову функцію, зробивши заміну

$$\frac{y}{x}=u(x) \quad \Rightarrow \quad y=ux, \quad y'=u'x+u.$$

У результаті цієї заміни одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u'x+u=\frac{1+u^2}{2u} \quad \Rightarrow \quad x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{2u}-u \quad \Rightarrow \quad xdu=\frac{1-u^2}{2u}dx.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{2u}{1-u^2}du=\frac{dx}{x}$$

та інтегруємо

$$\int\frac{2u}{1-u^2}du=\int\frac{dx}{x}-\ln C \quad \Rightarrow \quad -\ln\left|1-u^2\right|=\ln|x|-\ln C \quad \Rightarrow \quad ln\left|x\left(1-u^2\right)\right|=\ln C.$$

Потенціюємо:

$$x\left(1-u^2\right)=\pm C=C_1.$$

Виконуючи тепер обернену заміну $u=\frac{y}{x}$, отримаємо *загальний інтеграл* рівняння:

$$x\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)=C_1 \quad \Rightarrow \quad x^2-y^2=xC_1.$$

2020-3-14 11:52

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початкову умову (*задача Коші*):

$$xdy - ydx = ydy, \qquad y(-1) = 1.$$

Розв'язання. Перетворимо рівняння до вигляду:

$$(x - y)dy - ydx = 0.$$

Тоді, легко переконатися, що функції $P(x, y) = x - y$ і $Q(x, y) = -y$ - однорідні першого виміру, отже, рівняння однорідне.

Використовуючи *зауваження*, зробимо в отриманому рівнянні заміну

$$y = ux, \qquad dy = xdu + udx.$$

Отримаємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$(x - ux)(xdu + udx) - uxdx = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 (1 - u)du + (xu - u^2 x - ux)dx = 0,$$

$$x^2 (1 - u)du - u^2 xdx = 0.$$

Відокремлюємо змінні:

$$\frac{1 - u}{u^2} du = \frac{dx}{x}$$

та інтегруємо

$$\int \frac{1 - u}{u^2} du = \int \frac{dx}{x} - C \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{1}{u} - \ln|u| = \ln|x| - C \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{u} + \ln|ux| = C.$$

Повертаючись до змінної y, знаходимо *загальний інтеграл* рівняння:

$$\frac{x}{y} + \ln\left|\frac{y}{x} x\right| = C \qquad \Rightarrow \qquad x = y(C - \ln|y|).$$

Визначимо довільну сталу C, скориставшись початковою умовою:

$$y(-1) = 1 \qquad \Rightarrow \qquad -1 = 1(C - \ln 1) \qquad \Rightarrow \qquad C = -1.$$

Підставляючи це значення в загальний інтеграл, знайдемо шуканий *частинний інтеграл*

$$x = -y(1 + \ln|y|).$$

Завдання для самостійної роботи

. Знайти загальний розв'язок рівняння:

1.1. $y' = 2 + \frac{y}{x}$.

1.2. $(x + y)dx + 2xdy = 0$.

1.3. $y - xy' = x + yy'$.

1.4. $ydy + (x - 2y)dx = 0$.

1.5. $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.

1.6. $y = x(y' - \sqrt[x]{e^y})$.

1.7. $x\sin\frac{y}{x} \cdot y' + x = y\sin\frac{y}{x}$.

1.8. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$.

1.9. $xy' \cdot \ln\frac{y}{x} = x + y \cdot \ln\frac{y}{x}$.

1.10. $(xy' - y)\sin\frac{y}{x} = x$.

1.11. $(x - 2y + 3)dy + (2x + y - 1)dx = 0$.

1.12. $(x - y + 4)dy + (x + y - 2)dx = 0$.

Виконати обведені завдання

2. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння:

2.1. $(2x - 3y)dx + xdy = 0, \quad y(1) = -1$.

2.2. $(5\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0, \quad y(1) = 25$.

2.3. $xy' - y = x\cos^2\frac{y}{x}, \quad y(3) = 0$.

2.4. $xy' = y(3 + \ln y - \ln x), \quad y(1) = 1/e$.

2.5. $xy' - y = x \cdot tg\frac{y}{x}, \quad y(1) = \pi/2$.

2.6. $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0, \quad y(0) = 2$.

2020-3-14 11:57