Завдання для самостійної роботи

1. **Знайти загальний розв'язок рівняння:**

завдання з 1 по 7. та 2.1

1.1. $y' - \frac{y}{x} = 3x.$

1.2. $y' + 4\frac{y}{x} + x = 0.$

1.3. $x^2 y' + 2xy - 1 = 0.$

1.4. $y' - 7y = 8e^{3x}.$

1.5. $(x^2 + 1)y' - xy = x^3 + x.$

1.6. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{\sqrt{x}} - e^{2\sqrt{x}} = 0.$

1.7. $y' \cos x - y \sin x = \cos^2 x.$

1.8. $xy' \ln x = 5x - y.$

1.9. $\frac{dy}{dx} \cdot \cos^2 x + y = tgx.$

1.10. $y'(x^2 + 4) - xy = \sqrt{x^2 + 4}.$

1.11. $y^2 dx + (5xy - 4)dy = 0.$

Вказівка. Прийняти за невідому функцію x.

1.12. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x + ye^{-1/y}}.$

Вказівка. Прийняти за невідому функцію x.

2. **Знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння:**

2.1. $y' + 3y = xe^{-3x}, \quad y(0) = 0.$

2. Знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння:

2.1. $y' + 3y = xe^{-3x}$, $y(0) = 0$.

2.2. $y'(1 - x^2) = xy + 1$, $y(\sqrt{3}/2) = 2\pi/3$.

2.3. $\dfrac{dy}{dx} + e^x y = e^{2x}$, $y(0) = 1/e$.

2.4. $(1 - x^2)y' - 2xy = (1 - x^2)^2$, $y(3) = 40$.

2.5. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2 \sin x$, $y(\pi/2) = \pi$.

2.6. $xy' \ln x = x + \ln x$, $y(e^2) = 2\ln 2$.

Відповіді

1.1. $y = x(C + 3x)$. **1.2.** $y = C/x^4 - x^2/6)$. **1.3.** $y = (C + x)/x^2$.

1.4. $y = Ce^{7x} - 2e^{3x}$. **1.5.** $y = C\sqrt{x^2 + 1} + x^2 + 1$. **1.6.** $y = e^{2\sqrt{x}}(C + x)$.

1.7. $y = \dfrac{1}{\cos x}\left(C + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2x\right)$. **1.8.** $y = \dfrac{C + 5x}{\ln x}$. **1.9.** $y = Ce^{-tgx} + tgx - 1$.

1.10. $y = \sqrt{x^2 + 4}\left(C + \dfrac{1}{2} arctg \dfrac{x}{2}\right)$. **1.11.** $x = \dfrac{C + y^4}{y^5}$. **1.12.** $x = e^{-1/y}(C + y)$.

2.1. $y = \dfrac{1}{2}x^2 e^{-3x}$. **2.2.** $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$. **2.3.** $y = e^{-e^x} + e^x - 1$.

2.4. $y = x^3 + x^2 + x + 1$. **2.5.** $y = x(2 - \cos x)$. **2.6.** $y = \ln x \cdot \ln|\ln x|$.

Приклад 1. Знайти загальний розв’язок рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2.$$

Розв’язання. Дане рівняння має вигляд (5.1), тобто це - *рівняння Бернуллі*.

Зведемо його до лінійного, для чого поділимо обидві частини рівняння на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = x^2 \quad \Rightarrow \quad y'y^{-2} + \frac{1}{x} y^{-1} = x^2. \qquad (*)$$

Введемо нову змінну $z(x)$, зробивши заміну

$$z = y^{-1}.$$

Диференціюючи функцію $z(x)$, знайдемо

$$z' = \frac{dz}{dx} = -y^{-2} \cdot y' \quad \Rightarrow \quad y'y^{-2} = -z'.$$

Переходячи в рівнянні $(*)$ до змінної $z(x)$, отримаємо:

$$-z' + \frac{1}{x} z = x^2 \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{1}{x} z = -x^2. \qquad (**)$$

Отримане рівняння є *лінійним рівнянням 1* –го порядку відносно функції $z(x)$, і для знаходження його розв'язку скористаємось методом Бернуллі, поклавши

$$z = uv \quad \Rightarrow \quad z' = u'v + uv'.$$

Підставляючи z і z' в рівняння $(**)$, отримаємо:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x} uv = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' - \frac{1}{x} v\right) = -x^2. \qquad (***)$$

Знайдемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, в наслідок чого рівняння $(***)$ зводиться до системи:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{1}{x} v = 0, \\ u'v = -x^2. \end{cases}$$

Відокремлюючи змінні в першому рівнянні системи та інтегруючи, одержимо:

$$\frac{dv}{v}=\frac{1}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v|=\ln|x| \quad \Rightarrow \quad v=x.$$

Підставивши знайдену функцію $v=x$ в друге рівняння системи, отримаємо:

$$u'x=-x^2 \quad \Rightarrow \quad u'=-x.$$

Інтегруючи це рівняння, отримаємо функцію $u(x)$:

$$du=-x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int du=-\int xdx+C \quad \Rightarrow \quad u=-\frac{x^2}{2}+C.$$

Отже, загальний розв'язок *лінійного рівняння* $(**)$:

$$z=uv=\left(C-\frac{x^2}{2}\right)x=Cx-\frac{x^3}{2}.$$

Для отримання розв'язку рівняння $(*)$, слід повернутися до змінної y. Оскільки $z=y^{-1}$, то

$$\frac{1}{y}=\frac{2Cx-x^3}{2} \qquad \text{або} \qquad y=\frac{2}{2Cx-x^3}.$$

Це і є *загальний розв'язок* заданого рівняння Бернуллі.

Дане рівняння можна легко розв'язати і не зводячи його до лінійного, а безпосередньо застосовуючи до нього *метод Бернуллі*.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^2y^2y'+xy^3=1.$$

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на x^2y^2:

$$y'+\frac{y}{x}=\frac{1}{x^2y^2}.$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y' + \frac{y}{x} = x^2 y^2.$$

Розв'язання. Дане рівняння має вигляд (5.1), тобто це - *рівняння Бернуллі*.

Зведемо його до лінійного, для чого поділимо обидві частини рівняння на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = x^2 \quad \Rightarrow \quad y'y^{-2} + \frac{1}{x}y^{-1} = x^2. \qquad (*)$$

Введемо нову змінну $z(x)$, зробивши заміну

$$z = y^{-1}.$$

Диференціюючи функцію $z(x)$, знайдемо

$$z' = \frac{dz}{dx} = -y^{-2}\cdot y' \quad \Rightarrow \quad y'y^{-2} = -z'.$$

Переходячи в рівнянні $(*)$ до змінної $z(x)$, отримаємо:

$$-z' + \frac{1}{x}z = x^2 \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{1}{x}z = -x^2. \qquad (**)$$

Отримане рівняння є *лінійним рівнянням 1* –го порядку відносно функції $z(x)$, і для знаходження його розв'язку скористаємось методом Бернуллі, поклавши

$$z = uv \quad \Rightarrow \quad z' = u'v + uv'.$$

Підставляючи z і z' в рівняння $(**)$, отримаємо:

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = -x^2 \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' - \frac{1}{x}v\right) = -x^2. \qquad (***)$$

Знайдемо функцію $v(x)$ так, щоб вираз в дужках дорівнював нулю, в наслідок чого рівняння $(***)$ зводиться до системи:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{1}{x}v = 0, \\ u'v = -x^2. \end{cases}$$

2020-3-14 12:14

Отримали *рівняння Бернуллі* вигляду (5.1). Розв'яжемо його безпосередньо *методом Бернуллі*, поклавши

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv'.$$

Підставляючи y і y' в отримане рівняння, маємо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2u^2v^2} \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = \frac{1}{x^2u^2v^2}.$$

Звідси, як і в розв'язанні попередньої задачі, отримаємо два зв'язаних між собою рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{v}{x} = 0, \\ u'v = \dfrac{1}{x^2u^2v^2}. \end{cases}$$

Розв'язуючи перше рівняння, знаходимо v як найпростіший частинний розв'язок цього рівняння:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln\left|x^{-1}\right| \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{x}.$$

Підставляючи v в друге рівняння системи та розв'язуючи його, знаходимо u як загальний розв'язок цього рівняння:

$$\frac{du}{dx}\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^2u^2} \quad \Rightarrow \quad u^2du = xdx \quad \Rightarrow \quad \int u^2du = \int xdx + \overline{C},$$

звідси

$$\frac{u^3}{3} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{3} \quad \Rightarrow \quad u^3 = \frac{3x^2}{2} + C \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}.$$

Отже, можемо записати загальний розв'язок рівняння Бернуллі:

$$y = uv = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + C}\right)\frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}}.$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початкову умову (*задача Коші*):

$$\left(x^2 \ln y - x\right) y' = y, \qquad y\left(\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Розв'язання. Дане рівняння не буде лінійним відносно функції $y(x)$, оскільки змінна y входить під знак логарифма. Зробимо деякі перетворення:

$$\left(x^2 \ln y - x\right)\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x^2 \ln y - x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dy} = \frac{x^2 \ln y - x}{y},$$

звідси

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 \ln y}{y} - \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad x' + \frac{x}{y} = \frac{\ln y}{y} x^2.$$

Отримане рівняння є *рівняння Бернуллі*, якщо вважати змінну x функцією, а y її аргументом. Тоді його розв'язок шукаємо у вигляді

$$x = u(y) \cdot v(y) \quad \Rightarrow \quad x' = u'v + uv'.$$

Підставляючи x і x' в отримане рівняння, маємо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{y} = \frac{\ln y}{y} u^2 v^2 \quad \Rightarrow \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{y}\right) = \frac{\ln y}{y} u^2 v^2. \qquad (*)$$

Покладемо $v' + \dfrac{v}{y} = 0$ і знайдемо функцію $v(y)$:

$$\frac{dv}{dy} = -\frac{v}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -\ln|y| \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{y}.$$

Далі підставляємо знайдену функцію $v = \dfrac{1}{y}$ в рівняння (*) та відокремлюємо змінні:

$$u'\frac{1}{y} = \frac{\ln y}{y} u^2 \frac{1}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dy} = \frac{\ln y}{y^2} u^2 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{\ln y}{y^2} dy.$$

Інтеграл справа беремо частинами:

$$\int \frac{\ln y}{y^2}dy = \left| \begin{matrix} u = \ln y, & du = \frac{1}{y}dy \\ dv = \frac{dy}{y^2}, & v = -\frac{1}{y} \end{matrix} \right| = -\frac{\ln y}{y} + \int \frac{dy}{y^2} + C = -\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} + C.$$

У результаті знаходимо функцію $u(y)$:

$$-\frac{1}{u} = -\frac{\ln y}{y} - \frac{1}{y} + C \quad \Rightarrow \quad u = \frac{y}{\ln y + 1 - Cy}.$$

Отже, *загальний розв'язок* рівняння має вигляд:

$$x(y) = u(y) \cdot v(y) = \frac{1}{\ln y + 1 - Cy}.$$

Знайдемо тепер частинний розв'язок, що задовольняє початкову умову $x = \frac{1}{2}$ при $y = 1$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\ln 1 + 1 - C \cdot 1} \quad \Rightarrow \quad C = -1.$$

Отже, *частинний розв'язок заданого* рівняння має вигляд:

$$x = \frac{1}{\ln y + y + 1}.$$

202

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти розв'язок рівняння:

1.1. $y' + y = x\sqrt{x}.$

1.2. $y' + 2\dfrac{y}{x} = 3x^2 y^{4/3}.$

1.3. $y' - \dfrac{y}{x-1} = \dfrac{y^2}{x-1}.$

1.4. $y' + 2\dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$

1.5. $4xy' + 3y = -e^x x^4 y^5.$

1.6. $y' + y = e^{\frac{1}{2}x}\sqrt{y} = 0, \quad y(0) = \dfrac{9}{4}.$

1.7. $y' + \dfrac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2\left(x^3+1\right)\sin x, \quad y(0) = 1.$

1.8. $ydx + (x + x^2y^2)dy = 0.$

Вказівка. Прийняти за невідому функцію x.

1.9. $y' - 2ytgx + y^2\sin^2 x = 0.$

1.10. $y'\left(y^2 + 2y + x^2\right) + 2x = 0, \quad y(1) = 0.$

Вказівка. Прийняти за невідому функцію x.

Відповіді

1.1. $y = \left(x - 2 + Ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2$. **1.2.** $y^{-\frac{1}{3}} = Cx^{\frac{2}{3}} - \dfrac{3}{7}x^3$. **1.3.** $y = \dfrac{x-1}{C-x}$.

1.4. $y^{\frac{1}{2}} - tgx = \dfrac{\ln\cos x + C}{x}$. **1.5.** $y^{-4} = x^3\left(e^x + C\right)$ **1.6.** $y = e^{-x}\left(\dfrac{1}{2}e^x + 1\right)^2$.

1.7. $y = \dfrac{\sec x}{x^3+1}$. **1.8.** $x = \dfrac{1}{y(y+C)}$. **1.9.** $y = \dfrac{\sec^2 x}{tgx - x + C}$. **1.10.** $x^2 + y^2 = e^{-y}$.