**Практичне заняття 27.**

**Функція багатьох змінних. Частинні похідні. Повний диференціал.**

Функцію двох змінних позначають так: $u = f(x; y)$, а функцію трьох змінних - $u = f(x, y, z)$.

Областю визначення функції $u = f(x_1, x_2)$ називається сукупність усіх значень аргументів $x_1, x_2$,, при яких функція $u$ приймає певні дійсні значення. Область визначення позначають $D$.

Множину значень $u$ позначають $E(f)$ або $E$.

Значення функції в точці $M_0(x_1^0; x_2^0)$ позначають $u = f(x_1^0, x_2^0)$, або $u = f(M_0)$, або $u = z\big|_{M_0}$.

**Приклад.** Знайти область визначення функції $u = \ln(x^2 + y^2 - 1)$.

***Розв`язання.***

Задана функція $u$ є функцією двох змінних $x$ та $y$. Вона приймає дійсні значення тільки при умові

$x^2 + y^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 > 1$.

Отже, з останньої нерівності випливає, що областю визначення функції є частина площини $Oxy$, що лежить поза колом з центром у початку координат і радіусом $R = 1$.

Записують це так: $D = \{(x; y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ (рис. 1).

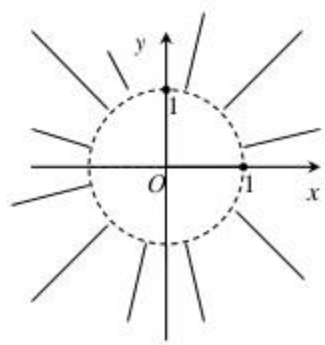


Рис. 1

Сукупність ліній, що задовольняють рівняння

$$f(x;y)=C,$$

називається лініями рівня.

**Приклад.** Визначити лінії рівня функції $u=1-x^2-y^2$.

***Розв'язання.*** Лініями рівня, є лінії, що задаються рівняннями $1-x^2-y^2=C$ або $x^2+y^2=1-C$. Це – коло з центром у початку координат радіуса $R=\sqrt{1-C}$.

### Частинні похідні першого порядку.

Розглянемо функцію двох змінних $z=f(x;y)$. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$

то вона називається *частинною похідною* функції $z=f(x,y)$ у точці $M(x;y)$ по змінній $x$ та позначається одним із таких символів:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f(x;y)}{\partial x},\ z'_x,\ f'_x(x;y).$$

Отже, за означенням маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x;y)-f(x;y)}{\Delta x}.$$

Аналогічно дається означення частинної похідної функції $z=f(x;y)$ по змінній $y$. Якщо існує границя

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y},$$

то вона називається *частинною похідною* функції $z=f(x,y)$ у точці $M(x;y)$ по змінній $y$ та позначається одним із таких символів:

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f(x;y)}{\partial y},\ z'_y,\ f'_y(x;y).$$

Отже, за означенням маємо

$$\frac{\partial z}{\partial y}=z'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}$$

Частинні похідні функції $z=f(x;y)$ називають *частинними похідними першого порядку*.

При обчисленні частинних похідних користуються вже відомими правилами і формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому другу змінну сталою.

**Приклад.** Знайти частинні похідні функції $z=y^4+\sin(2x-4y)+\dfrac{y}{x}$.

***Розв'язання.*** $$z'_x=\left(y^4+\sin(2x-4y)+\frac{y}{x}\right)'_x\Bigg|_{\substack{x-\text{змінна}\\ y-\text{стала}}}=$$

$$=\left(y^4\right)'_x+\left(\sin(2x-4y)\right)'_x+\left(\frac{y}{x}\right)'_x=$$

$$=0+\cos(2x-4y)(2x-4y)'_x+y\left(x^{-1}\right)'_x=2\cos(2x-4y)-\frac{y}{x^2};$$

$$z'_y=\left(y^4+\sin(2x-4y)+\frac{y}{x}\right)'_y\Bigg|_{\substack{y-\text{змінна}\\ x-\text{стала}}}=\left(y^4\right)'_y+\left(\sin(2x-4y)\right)'_y+\left(\frac{y}{x}\right)'_y=$$

$$=4y^3+\cos(2x-4y)(2x-4y)'_y+\frac{1}{x}(y)'_y=4y^3-4\cos(2x-4y)+\frac{1}{x}.$$

**Приклад.** Знайти частинні похідні функції $z=x^2-3xy-4y^2-x+2y+1$.

***Розв'язання.*** Припускаючи, що $y$ стала й обчислюючи похідну від функції $z$ по $x$, знаходимо частинну похідну по $x$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'_x(x,y)=2x-3y-1.$$

Припускаючи, що $x$ стала й обчислюючи похідну від функції $z$ по $y$, знаходимо частинну похідну по $y$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'_y(x,y)=-3x-8y+2.$$

**Завдання для самостійної роботи:**

**№ 1.** Знайти $f(x_0, y_0)$, якщо:

1) $f(x,y)=\dfrac{2x-3y}{3x-2y},\ x_0=2,\ y_0=1;$ 2) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y},\ x_0=-3,\ y_0=4.$

(*Відповідь:* 1) 0,25; 2) $-0{,}96$.)

**№ 2.** Знайти та зобразити область визначення заданої функції:

1) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; 2) $z=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}}$;

3) $z=\ln(y^2-4x+8)$; 4) $z=\arcsin\dfrac{y-1}{x}$;

5) $u=\ln(1-x^2-y^2+z^2)$; 6) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z+1}}$.

(*Відповідь:* 1) $x^2+y^2\le 4$; 2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1$; 3) $y^2>4x-8$;

4) $\begin{cases}1-x\le y\le 1+x,\ (x>0),\\ 1+x\le y\le 1-x,\ (x<0);\end{cases}$ 5) $x^2+y^2-z^2<1$;

6) $x>1,\ y>0,\ z>-1$.)

**№ 3.** Знайти і побудувати графік лінії рівня функції:

1) $z=x+y$; 2) $z=x^2+y^2$; 3) $z=x^2-y^2$;

4) $z=\dfrac{y}{x}$; 5) $z=xy$; 6) $z=x^2-y$.

**№ 4.** Знайти частинні похідні першого порядку заданої функції:

1) $z=x^3y-y^3x+2y^2-3x+4$; 2) $z=(5x^2y-y^3+7)^3$; 3) $z=arctg\dfrac{x}{y}$;

4) $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$; 5) $z=x^y$; 6) $z=\ln tg\dfrac{y}{x}$.

(*Відповідь:* 1) $z'_x=3x^2y-y^3-3,\ z'_y=x^3-3xy^2+4y$;

2) $z'_x=30xy(5x^2y-y^3+7)^2,\ z'_y=3(5x^2y-y^3+7)^2(5x^2-3y^2)$;

3) $z'_x=\dfrac{y}{x^2+y^2},\ z'_y=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

4) $z'_x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z'_y=\dfrac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$;

5) $z'_x=yx^{y-1},\ z'_y=x^y\ln x$; 6) $z'_x=-\dfrac{2y}{x^2\sin\dfrac{2y}{x}},\ z'_y=\dfrac{2}{x\sin\dfrac{2y}{x}}$.)