Повний приріст та повний диференціал.

Якщо аргументам x і y функції $z = f(x; y)$ надати відповідно приросту Δx і Δy, то функція одержить *повний приріст в точці* $M(x; y)$:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Якщо функція $z = f(x; y)$ має в точці $M(x; y)$ неперервні частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, то її повний приріст в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де $\alpha = \alpha(\Delta x; \Delta y)$, $\beta = \beta(\Delta x; \Delta y)$ — нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

В цьому випадку функція $z = f(x; y)$ називається *диференційовною* у точці $M(x; y)$.

Сума перших двох доданків утворює вираз, лінійний відносно Δx і Δy, який є головною лінійною частиною повного приросту Δz і *називається повним диференціалом функції* $f(x; y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Для незалежних змінних x і y виконуються рівності: $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$. Тому

$$dz = z'_x dx + z'_y dy \quad \text{або} \quad dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Рівність Δz можна записати у вигляді $\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$. Тут величина $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ – нескінченно мала вищого порядку, ніж dz. Звідси випливає наближена рівність:

$$\Delta z \approx dz.$$

Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні f'_x та f'_y, які є неперервними у точці $M_0(x_0, y_0)$, то є вірною наближена рівність:

$$f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y,$$

за допомогою якої можна знаходити наближене значення функції.

Приклад. Знайти повний диференціал функції $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні, використовуючи похідну частки:

$$z'_x = \frac{1\cdot\sqrt{x^2+y^2} - x\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - \dfrac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{\left(x^2+y^2\right)} =$$

$$= \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} = y^2\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}},$$

$$z_y{}' = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = x\left(\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'_y = -\frac{1}{2}x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x^2+y^2\right)'_y =$$

$$= -\frac{1}{2}x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y = -xy\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Таким чином, за формулою $dz = z'_x dx + z'_y dy$ повний диференціал має вигляд:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = y^2\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx - xy\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}dy =$$

$$= \left(x^2+y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(y^2dx - xydy\right).$$

Приклад. Знайти наближено $1{,}07^{3{,}97}$.

Розв'язання. Число $1{,}07^{3{,}97}$ є значенням функції $f(x,y) = x^y$ при $x = 1{,}07$ та $y = 3{,}97$. Відомо, що $f(1;4) = 1$. Тому нехай $x_0 = 1$, $y_0 = 4$. Тоді $\Delta x = x - x_0 = 0{,}07$, $\Delta y = y - y_0 = -0{,}03$. Знайдемо значення частинних похідних при $x = 1{,}07$ та $y = 3{,}97$:

$$f'_x = yx^{y-1}, \quad f'_y = x^y \ln x, \quad f'_x(1;4) = 4, \quad f'_y(1;4) = 0.$$

За формулою $f(x_0+\Delta x; y_0+\Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0)\Delta x + f'_y(x_0; y_0)\Delta y$ маємо

$$1{,}07^{3{,}97} = f(1{,}07;3{,}97) \approx f(1;4) + f'_x(1;4)\Delta x + f'_y(1;4)\Delta y =$$

$$= 1 + 4\cdot 0{,}07 + 0\cdot(-0.03) = 1{,}28.$$

Отже, $1{,}07^{3{,}97} \approx 1{,}28$.

Частинні похідні вищих порядків

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку називаються частинними похідними *другого порядку*. У випадку функції $z = f(x; y)$ маємо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \text{ або } z''_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \text{ або } z''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \text{ або } z''_{yx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \text{ або } z''_{yy}.$$

Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ називаються мішаними частинними похідними другого порядку.

Аналогічно визначаються і позначаються частинні похідні третього, четвертого та інші похідні вищих порядків.

Частинні похідні вищих порядків, які відрізняються одна від одної тільки послідовністю диференціювання, рівні, якщо вони неперервні.

Наприклад, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (теорема Шварца),

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}.$$

Отже, функція двох змінних $z = f(x; y)$ має три різні частинні похідні другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; чотири різні похідні третього порядку

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}; \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}; \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \cos(x+2y) + e^{3y-x}$.

Розв`язання. $z'_x = \left(\cos(x+2y) + e^{3y-x}\right)'_x \Big|_{\substack{x-\text{змінна} \\ y-\text{стала}}} = \left(\cos(x+2y)\right)'_x + \left(e^{3y-x}\right)'_x =$

$= -\sin(x+2y)(x+2y)'_x + e^{3y-x}(3y-x)'_x = -\sin(x+2y) - e^{3y-x};$

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(-\sin(x+2y) - e^{3y-x}\right)'_x \Big|_{\substack{x-\text{змінна} \\ y-\text{стала}}} = -\left(\sin(x+2y)\right)'_x - \left(e^{3y-x}\right)'_x =$$

$$= -\cos(x+2y)(x+2y)'_x - e^{3y-x}(3y-x)'_x = -\cos(x+2y) + e^{3y-x};$$

$$z''_{xy}=\left(z'_x\right)'_y=\left(-\sin(x+2y)-e^{3y-x}\right)'_y\Bigg|_{\substack{y\text{–змінна}\\x\text{–стала}}}=-\left(\sin(x+2y)\right)'_y-\left(e^{3y-x}\right)'_y=$$

$$=-\cos(x+2y)(x+2y)'_y-e^{3y-x}(3y-x)'_y=-2\cos(x+2y)-3e^{3y-x};$$

$$z'_y=\left(\cos(x+2y)+e^{3y-x}\right)'_y\Bigg|_{\substack{y\text{–змінна}\\x\text{–стала}}}=\left(\cos(x+2y)\right)'_y+\left(e^{3y-x}\right)'_y=$$

$$=-\sin(x+2y)(x+2y)'_y+e^{3y-x}(3y-x)'_y=-2\sin(x+2y)+3e^{3y-x};$$

$$z''_{yy}=\left(z'_y\right)'_y=\left(-2\sin(x+2y)+3e^{3y-x}\right)'_y\Bigg|_{\substack{y\text{–змінна}\\x\text{–стала}}}=-2\left(\sin(x+2y)\right)'_y+3\left(e^{3y-x}\right)'_y=$$

$$=-2\cos(x+2y)(x+2y)'_y+3e^{3y-x}(3y-x)'_y=-4\cos(x+2y)+9e^{3y-x};$$

$$z''_{yx}=\left(z'_y\right)'_x=\left(-2\sin(x+2y)+3e^{3y-x}\right)'_x\Bigg|_{\substack{x\text{–змінна}\\y\text{–стала}}}=-2\left(\sin(x+2y)\right)'_x+3\left(e^{3y-x}\right)'_x=$$

$$=-2\cos(x+2y)(x+2y)'_x+3e^{3y-x}(3y-x)'_x=-2\cos(x+2y)-3e^{3y-x}.$$

Отже, $z''_{xy}=z''_{yx}=-2\cos(x+2y)-3e^{3y-x}$.

Дотична площина та нормаль до поверхні.

Нехай задана диференційована функція $z=f(x,y)$ з областю визначення D площини Oxy. Її геометричним образом є поверхня трьох вимірного простору. Будь-якій точці $P(x_0;y_0)\in D$ відповідає точка поверхні $M_0(x_0;y_0;z_0)$, де $z_0=f(x_0,y_0)$.

Через точку M_0 можна провести безліч кривих, що лежать на поверхні, а значить, і безліч дотичних до цих кривих у точці M_0. Сукупність цих дотичних прямих утворює дотичну площину до поверхні в точці M_0.

Рівняння дотичної площини до поверхні, заданої рівнянням $z=f(x,y)$ в точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ має вигляд:

$$z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Нормаллю до поверхні в точці M_0 називається пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини.

Оскільки вектор нормалі $\vec{n}=\left(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0);-1\right)$ дотичної площини є напрямним вектором нормалі, то у випадку, коли поверхня задана рівнянням $z=f(x,y)$, рівняння нормалі має вигляд:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x, y, z)=0$ і точка M_0 належить поверхні, то рівняння дотичної площини до поверхні в точці M_0 має вигляд:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0, y_0, z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0, y_0, z_0)(z-z_0)=0,$$

а рівняння нормалі до поверхні в точці M_0 таке:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Приклад. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні $z=xy$ в точці $M_0(1;2;2)$.

Розв`язання. Знайдемо частинні похідні функції $z=xy$:

$$z'_x=y;\ z'_y=x.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці M_0, для цього замість x підставимо $x_0=1$, а замість y підставимо $y_0=2$:

$$z'_x(M_0)=2;\ z'_y(M_0)=1.$$

Рівняння дотичної площини до поверхні в точці M_0 має вигляд:

$$z-2=2(x-1)+1(y-2) \text{ або } 2x+y-z-2=0.$$

Отже, рівняння нормалі до поверхні в точці M_0 має вигляд:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-1}.$$

Завдання для самостійної роботи:

№ 5. Знайти частинні похідні другого порядку:

1) $z=x^3-2x^2y+3y^2$; 2) $z=\dfrac{x^2}{2y-3}$.

3) $z=\ln(x^2+y^2)$; 4) $z=xy+\dfrac{y}{x}$.

(*Відповідь*: 1) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-4y$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-4x$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6$;

2) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2}{2y-3}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\dfrac{4x}{(2y-3)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{8x^2}{(2y-3)^3}$;

3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\dfrac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$;

4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2y}{x^3}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=1-\dfrac{1}{x^2}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.)

№ 6. Знайти повний диференціал функції:

1) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; 2) $z = \ln \operatorname{tg} xy$;

3) $u = \ln\left(x^3 + 2y^3 - z^3\right)$; 4) $u = (xy)^z$.

(*Відповідь:* 1) $dz = -\dfrac{1}{1+x^2}dx + \dfrac{1}{1+y^2}dy$; 2) $dz = \dfrac{2}{\sin 2xy}\left(ydx + xdy\right)$;

3) $du = \dfrac{3x^2dx + 6y^2dy - 3z^2dz}{x^3 + 2y^3 - z^3}$; 4) $du = (xy)^z\left(\dfrac{z}{x}dx + \dfrac{z}{y}dy + \ln(xy)dz\right)$.)

№ 7. Обчислити наближено:

1) $(1{,}04)^{2{,}02}$; 2) $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$;

3) $\ln\left(\sqrt[3]{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$; 4) $\sin 28^\circ \cos 61^\circ$.

(*Відповідь:* 1) 1,08; 2) 2,95; 3) 3,037; 4) 0,227.)