

Додадкові завдання до теми «Невизначений інтеграл».

Дополнительные задания по теме «Неопределенные интегралы».

Завдання 1. (Задание 1.)

1. а) $\int x^3 \sqrt{4 - 3x^4} dx$; б) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$.

(Ответ: а) $-\frac{1}{8} \sqrt{(4 - 3x^4)^3} + C$; б) $\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4 \ln(1 + \sqrt{x}) + C$.)

2. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{9 - 2x^3}} dx$; б) $\int \frac{dx}{x \sqrt{4 - x^2}}$.

Завдання 2. (Задание 2.)

1. а) $\int \frac{3x+9}{x^2-6x+12} dx$; б) $\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$.

2. а) $\int \frac{x-7}{x^2-10x+9} dx$; б) $\int \frac{7x-2}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$.

3. а) $\int \frac{7x+3}{2x^2+4x+9} dx$; б) $\int \frac{4x-5}{\sqrt{x^2+10x+29}} dx$.

Завдання 3. (Задание 3.)

1. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}} dx$; б) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+2}}$.

(Ответ: а) $\frac{4}{3} (\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3+1})) + C$;
б) $\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3} + C$.)

2. а) $\int \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}} dx$; б) $\int \frac{4x dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2 + \sqrt[3]{x+1} + 1}}$.

(Ответ: а) $\frac{2}{9} \sqrt[4]{x^9} - \frac{12}{13} \sqrt[12]{x^{13}} + C$; б) $3\sqrt[3]{x+1} - 4(x+1) + C$.)

3. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}}$; б) $\int \frac{4x dx}{\sqrt[3]{(3x-8)^2 - 2\sqrt[3]{3x-8} + 4}}$.

(Ответ: а) $6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt[6]{x})\right) + C$;
б) $\frac{1}{3} \sqrt[3]{(3x-8)^4} + \frac{8}{9} (3x-8) + C$.)

Завдання 4. (Задание 4.)

$$1. \text{ а) } \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}; \text{ б) } \int \frac{4dx}{x(x^2+4)}.$$

(Ответ: а) $\frac{1}{12} \ln \left| \frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4} \right| + C$; б) $\ln \frac{\sqrt{x^2+4}}{|x|} + C$.)

$$2. \text{ а) } \int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{x(x+1)^2}.$$

(Ответ: а) $\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + C$; б) $\frac{1}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$.)

$$3. \text{ а) } \int \frac{dx}{x(x^2-1)}; \text{ б) } \int \frac{13dx}{x(x^2+6x+13)}.$$

Завдання 5. (Задание 5.)

$$1. \int \frac{dx}{3+5 \cos x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.)$$

$$2. \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.)$$

$$3. \int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}. \quad (\text{Ответ: } \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C.)$$

$$4. \int \cos^3 x \sin^{10} x dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^{13} x}{13} + C.)$$

$$5. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x}.$$

Завдання 6. (Задание 6.)

$$1. \text{ а) } \int \frac{\sin^3 x}{\cos x} dx; \quad \text{б) } \int \cos 2x \cdot \sin 10x dx;$$

в) $\int \operatorname{tg}^2 7x dx.$

$$2. \text{ а) } \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx; \quad \text{б) } \int \sin(7x-1) \sin 5x dx;$$

в) $\int \frac{3x+2}{x^2+9} dx.$

$$3. \text{ а) } \int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx; \quad \text{б) } \int \sin^3(1-3x) dx;$$

в) $\int \frac{x+3}{x+1} dx.$

Завдання 7. (Задание 7.)

$$1. \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C.)$$

$$2. \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}. \quad (\text{Ответ: } \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.)$$

$$3. \int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}. \quad (\text{Ответ: } \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C.)$$

$$4. \int \cos^3 x \sin^{10} x dx. \quad (\text{Ответ: } \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^{13} x}{13} + C.)$$

$$5. \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x}.$$

41

Завдання 8. (Задание 8.)

$$1. \text{ а) } \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx; \text{ б) } \int \frac{dx}{4 - 5 \sin x}.$$

$$(\text{Ответ: а) } \frac{3}{5} \cos^{5/3} x - 3 \cos^{-1/3} x + C;$$

$$\text{б) } \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C.)$$

$$2. \text{ а) } \int \frac{\cos 2x}{\sqrt{3 + 4 \sin 2x}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\sin x dx}{\sin x + 1}.$$

$$(\text{Ответ: а) } \frac{1}{4} \sqrt{3 + 4 \sin 2x} + C; \quad \text{б) } \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + x + C.)$$

$$3. \text{ а) } \int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{(3 + 2 \cos 3x)^2}}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \cos^2 x}.$$

$$(\text{Ответ: а) } \frac{1}{2} \sqrt{3 + 2 \cos 3x} + C;$$

$$\text{б) } \sqrt{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - x + C.)$$