Лекція 10.04.2020

Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Задача інтегрування лінійного однорідного диференціального рівняння зводиться до задачі знаходження фундаментальної системи його частинних розв'язків, яку не завжди можливо розв'язати в загальному випадку. Але для деяких типів рівнянь відшукання фундаментальних систем іноді зводиться до простих алгебраїчних операцій.

Метод Ейлера знаходження частинного розв'язку ЛОДР зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо випадок ЛОДР-n, в якому $a_i(x) = a_i = \text{const}$:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (7.3)$$

тобто *лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Згідно *методу Ейлера* частинний розв'язок рівняння (7.3) шукаємо у вигляді

$$y = e^{kx}, \qquad (7.4)$$

де k — деяке число, яке треба знайти. Тоді

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \ldots, y^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Підставивши функцію $y = e^{kx}$ та її похідні в рівняння (7.3), одержимо

$$k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + \ldots + a_{n-1} k e^{kx} + a_n e^{kx} = 0,$$

звідки маємо співвідношення ($e^{kx} \neq 0$)

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \qquad (7.5)$$

Алгебраїчне рівняння (7.5) називають *характеристичним рівнянням* відповідного ЛОДР-n. Характеристичне рівняння одержують із заданого диференціального рівняння (7.3) заміною похідної функції відповідним степенем k, причому сама функція як " похідна нульового порядку " заміняється одиницею.

Таким чином, функція e^{kx} є розв'язком ЛОДР (7.3) тоді і тільки тоді, коли k є коренем характеристичного рівняння (7.5).

7.2.2. Побудова загального розв'язку ЛОДР другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо лінійне однорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами другого порядку:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \qquad (7.6)$$

де a_1, a_2 — дійсні числа. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0. \qquad (7.7)$$

Позначимо корені характеристичного рівняння через k_1 та k_2. Можливі наступні випадки:

1. k_1 і k_2 — дійсні і різні числа ($k_1 \neq k_2$);
2. k_1 і k_2 — дійсні і рівні числа ($k_1 = k_2$);
3. k_1 і k_2 — комплексно-спряжені числа ($k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$).

1. Корені характеристичного рівняння дійсні і різні:

$$k_1 \neq k_2.$$

За формулою (7.4) частинними розв'язками рівняння (7.6) є функції

$$y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x},$$

які є лінійно незалежними $\left(\frac{e^{k_1 x}}{e^{k_2 x}} = e^{(k_1 - k_2)x} \neq \text{const}, k_1 \neq k_2\right)$, тобто утворюють фундаментальну систему розв'язків рівняння. За теоремою 7.1 загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x},$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Приклад 7.1. Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y' - 2y = 0.$$

❍ Запишемо характеристичне рівняння:

$$k^2 - k - 2 = 0.$$

корені якого $k_1 = -1, k_2 = 2$. Частинні розв'язки: $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^{2x}$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}. \bullet$$

2. Корені характеристичного рівняння дійсні і рівні:

$$k_1 = k_2.$$

Фундаментальна система розв'язків рівняння (7.6) містить два лінійно незалежних частинних розв'язки даного рівняння. Один частинний розв'язок $y_1 = e^{k_1 x}$ дістанемо одразу. Другий розв'язок, лінійно незалежний з першим, має вигляд

$$y_2 = xe^{k_1 x}.$$

Покажемо це. Нехай $e^{k_1 x}, e^{k_2 x}$ — частинні розв'язки заданого диференціального рівняння. Тоді $\frac{e^{k_2 x} - e^{k_1 x}}{k_2 - k_1}$ також буде розв'язком цього рівняння як лінійна комбінація розв'язків. Якщо k_2 наближається до k_1, то

$$\lim_{k_2 \to k_1} \frac{e^{k_2 x} - e^{k_1 x}}{k_2 - k_1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{k_2 \to k_1} \frac{e^{k_1 x}(e^{(k_2 - k_1)x} - 1)}{k_2 - k_1} = xe^{k_1 x}.$$

Функції $y_1 = e^{k_1 x}$ та $y_2 = xe^{k_1 x}$ є лінійно незалежними $\left(\frac{e^{k_1 x}}{xe^{k_1 x}} = \frac{1}{x} \neq \text{const}\right)$ частинними розв'язками заданого диференціального рівняння, тобто утворюють фундаментальну систему розв'язків. Отже, загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами у випадку дійсних рівних коренів характеристичного рівняння має вигляд

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 x e^{k_1 x},$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Приклад 7.2. Проінтегруємо диференціальне рівняння

$$y'' - 10y' + 25y = 0.$$

❍ Розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння:

$$k^2 - 10k + 25 = 0 \Rightarrow (k-5)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$k_1 = k_2 = 5.$$

Корені рівняння дійсні і рівні, отже, загальний розв'язок диференціального рівняння записується у вигляді

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x} = (c_1 + c_2 x)e^{5x}. \bullet$$

3. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені:

$$k_1 = \alpha + i\beta, k_2 = \alpha - i\beta.$$

Частинними розв'язками в даному випадку за формулою (7.4) будуть функції

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad e^{(\alpha-i\beta)x},$$

які за формулою Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

можна записати у вигляді

$$e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x), \quad e^{\alpha x}(\cos\beta x - i\sin\beta x).$$

З твердження 7.3 випливає, що частинними розв'язками рівняння (7.6) будуть також функції

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Ці розв'язки лінійно незалежні, оскільки

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{e^{\alpha x}\sin\beta x} = \mathrm{ctg}\beta x \neq \mathrm{const},$$

отже, утворюють фундаментальну систему розв'язків. Загальний розв'язок рівняння (7.6) у випадку комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\sin\beta x),$$

де c_1, c_2 — довільні сталі.

Приклад 7.3. Розв'яжемо диференціальне рівняння

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

❍ Характеристичне рівняння

$$k^2 - 2k + 5 = 0$$

має корені $k_{1,2} = 1 \pm 2i$. Комплексно-спряженим кореням відповідають частинні розв'язки

$$y_1 = e^x\cos 2x \text{ та } y_2 = e^x\sin 2x.$$

Таким чином,загальний розв'язок має вигляд

$$y = e^x(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x). \bullet$$

7.2.3. Побудова загального розв'язку ЛОДР n-го порядку зі сталими коефіцієнтами

Результати, які одержали при розгляді диференціального рівняння другого порядку, можна узагальнити на випадок диференціального рівняння довільного порядку зі сталими коефіцієнтами.

Наведемо правило знаходження загального розв'язку ЛОДР-n

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0$$

зі сталими коефіцієнтами $(a_1, a_2, \ldots, a_n = \text{const}, a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n})$.

1. Складаємо характеристичне рівняння

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0$$

та знаходимо його корені.

2. Будуємо фундаментальну систему розв'язків, тобто виписуємо частинні лінійно незалежні розв'язки, що відповідають знайденим кореням характеристичного рівняння:

а) кожному простому (однократному) дійсному кореню k відповідає розв'язок:

$$y = e^{kx};$$

б) кожному m-кратному дійсному кореню k відповідає m розв'язків:

$$y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, \ldots, y_m = x^{m-1}e^{kx};$$

в) кожній парі простих комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ відповідає два розв'язки:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

г) кожній m-кратній парі комплексно-спряжених коренів $\alpha \pm i\beta$ відповідає $2m$ розв'язків:

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, y_m = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$y_{m+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x, y_{m+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3. Лінійна комбінація знайдених n частинних розв'язків (з довільними сталими коефіцієнтами) є загальним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Приклад 7.4. Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y''' - 3y'' + y' - 3y = 0.$$

❍Маємо ЛОДР третього порядку зі сталими коефіцієнтами. Для знаходження його загального розв'язку складаємо характеристичне рівняння

$$k^3 - 3k^2 + k - 3 = 0,$$

або

$$(k-3)(k^2+1) = 0.$$

Коренями характеристичного рівняння є

$$k_1 = 3, k_{2,3} = \pm i.$$

Функції e^{3x}, $\cos x$, $\sin x$ утворюють фундаментальну систему розв'язків заданого рівняння. Загальний розв'язок має вигляд:

$$y = c_1 e^{3x} + c_2\cos x + c_3\sin x. \bullet$$

Практичні заняття за темою лекції (10.04.2020, 13.04.2020, 16.04.2020, 17.04.2020)

Приклад 4.1.

$$y'' - 2y = 0\,, \tag{4.11}$$

$$y(0) = 3\,, \quad y'(0) = -1\,. \tag{4.12}$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого порядку (4.11):

$$\lambda^2 - 2 = 0. \tag{4.13}$$

Знайдемо розв'язки характеристичного рівняння (4.13):

$$\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \left(\lambda - \sqrt{2}\right)\left(\lambda + \sqrt{2}\right) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}.$$

Характеристичне рівняння має два дійсні та різні корені, тому диференціальне рівняння (4.11) має два частинних розв'язка:

$$y_1 = e^{-\sqrt{2}x}, \quad y_2 = e^{\sqrt{2}x}, \tag{4.14}$$

підставимо y_1 та y_2 вигляду (4.14) в формулу (4.4):

$$y = C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x}. \tag{4.15}$$

(4.15)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.11).

Розв'яжемо тепер задачу Коші (4.12) диференціального рівняння (4.11). Знайдемо y' від загального розв'язку (4.15) однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.11):

$$y' = \left(C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 x e^{\sqrt{2}x}\right)' = \left(C_1 e^{-\sqrt{2}x}\right)' + \left(C_2 e^{\sqrt{2}x}\right)' = C_1\left(e^{-\sqrt{2}x}\right)' + C_2\left(e^{\sqrt{2}x}\right)' = C_1 e^{-\sqrt{2}x}\cdot\left(-\sqrt{2}x\right)' +$$

$$+ C_2 e^{\sqrt{2}x}\cdot\left(\sqrt{2}x\right)' = C_1 e^{-\sqrt{2}x}\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + C_2 e^{\sqrt{2}x}\cdot\sqrt{2} = C_1\left(-\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}x} + C_2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}x} = \sqrt{2}(-C_1 e^{-\sqrt{2}x} + C_2 e^{\sqrt{2}x})\,. \tag{4.16}$$

Початкові умови (4.12) підставимо в (4.15) та (4.16) відповідно:

$$3 = C_1 e^{-\sqrt{2}\cdot 0} + C_2 e^{\sqrt{2}\cdot 0}, \tag{4.17}$$

$$-1 = \sqrt{2}(-C_1 e^{-\sqrt{2}\cdot 0} + C_2 e^{\sqrt{2}\cdot 0})\,. \tag{4.18}$$

Рівності (4.17) та (4.18) утворюють систему рівнянь відносно невідомих C_1 та C_2:

$$\begin{cases} 3 = C_1 e^{-\sqrt{2}\cdot 0} + C_2 e^{\sqrt{2}\cdot 0} \\ -1 = \sqrt{2}(-C_1 e^{-\sqrt{2}\cdot 0} + C_2 e^{\sqrt{2}\cdot 0}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 e^0 + C_2 e^0 \\ -1 = \sqrt{2}(-C_1 e^0 + C_2 e^0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = C_1 + C_2 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2C_1 = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 2C_2 = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2C_1 = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 2C_2 = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{2}\left(3 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ C_2 = \dfrac{1}{2}\left(3 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}. \tag{4.19}$$

Підставимо знайдені значення C_1 та C_2, вигляду (4.19) в загальний розв'язок (4.15) та запишемо розв'язок задачі Коші рівняння (4.11) з початковими умовами (4.12):

$$y = \frac{3}{2}\left(e^{-\sqrt{2}x} + e^{\sqrt{2}x}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(e^{-\sqrt{2}x} - e^{\sqrt{2}x}\right). \tag{4.20}$$

Таким чином, однорідне диференціальне рівняння другого порядку (4.11) має загальний розв'язок (4.15) та розв'язок (4.20) задачі Коші з початковими умовами (4.12).

Приклад 4.2.

$$y'' - 6y' + 8y = 0. \tag{4.15}$$

Розв'язання.

Складемо відповідне (4.15) характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0. \tag{4.16}$$

Розв'язками характеристичного рівняння (4.16) є дійсні та різні між собою числа: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4$.
Запишемо частинні розв'язки диференціального рівняння (4.15):

$$y_1 = e^{2x}, \qquad y_2 = e^{4x}, \tag{4.17}$$

підставимо y_1 та y_2 вигляду (4.17) в формулу (4.4):

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}. \tag{4.18}$$

(4.18)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.15).

Приклад 4.3.

$$y'' - y' - 2y = 0. \tag{4.19}$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння, що відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого порядку (4.19), має вигляд:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0. \tag{4.20}$$

Розв'язками характеристичного рівняння (4.20) є дійсні та різні між собою числа: $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2$, тому частинні розв'язки диференціального рівняння (4.19) матимуть вигляд:

$$y_1 = e^{-x}, \qquad y_2 = e^{2x}, \tag{4.21}$$

y_1 та y_2 вигляду (4.21) підставимо в формулу (4.4):

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}. \tag{4.22}$$

(4.22)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.19).

Приклад 4.4.

$$y'' - y = 0. \tag{4.23}$$

Розв'язання.

Характеристичне рівняння, що відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого порядку (4.23), має вигляд:

$$\lambda^2 - 1 = 0. \tag{4.24}$$

Розв'язками характеристичного рівняння (4.23) є дійсні та різні між собою числа: $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1$, тому частинні розв'язки диференціального рівняння (4.23) матимуть вигляд:

$$y_1 = e^{-x}, \qquad y_2 = e^{x}, \tag{4.25}$$

y_1 та y_2 вигляду (4.25) підставимо в формулу (4.4):

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x}. \tag{4.26}$$

(4.26)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.23).

Приклад 4.5.

$y'' + y = 0$. (4.27)

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого поряду (4.27):

$\lambda^2 + 1 = 0.$ (4.28)

Знайдемо розв'язки характеристичного рівняння (4.28):

$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda_1 = -\sqrt{-1}, \quad \lambda_2 = \sqrt{-1} \Rightarrow \lambda_1 = -i, \quad \lambda_2 = i$.

Як бачимо, характеристичне рівняння має два різних комплексних кореня, тому, за формулами (4.6) диференціальне рівняння (4.27) має два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки:

$y_1 = \cos x, \qquad y_2 = \sin x,$ (4.29)

використовуючи формулу (4.8) та отримані значення y_1 та y_2 вигляду (4.29), маємо:

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. (4.30)

(4.30)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.27).

Приклад 4.6.

$y'' + 4y = 0$. (4.31)

Розв'язання.

Характеристичне рівняння, що відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого порядку (4.31), має вигляд:

$\lambda^2 + 4 = 0.$ (4.32)

Розв'язками характеристичного рівняння (4.20) є комплексними числами: $\lambda_1 = -2i, \quad \lambda_2 = 2i$, тому частинні розв'язки диференціального рівняння (4.19) матимуть вигляд:

$y_1 = \cos 2x, \qquad y_2 = \sin 2x,$ (4.33)

Значення y_1 та y_2 вигляду (4.21) підставимо в формулу (4.8):

$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$. (4.34)

(4.34)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.31).

Приклад 4.7.

$y'' + y' + 3y = 0$. (4.35)

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого поряду (4.35):

$\lambda^2 + \lambda + 3 = 0.$ (4.36)

Знайдемо розв'язки характеристичного рівняння (4.36):

$$\lambda^2 + \lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Як бачимо, характеристичне рівняння має два різних комплексних кореня, тому, за формулами (4.6) диференціальне рівняння (4.35) має два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки:

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x, \qquad y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x, \tag{4.37}$$

підставимо y_1 та y_2 вигляду (4.37) у формулу (4.4):

$$y = C_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + C_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x. \tag{4.38}$$

(4.38)-загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.35), який також можна записати у вигляді:

$$y = \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2} x \right) e^{-\frac{x}{2}}.$$

Приклад 4.8.

$$y''+10y'+25y=0. \qquad (4.39)$$

Розв'язання.

Складемо характеристичне рівняння, яке відповідає однорідному диференціальному рівнянню другого порядку (4.38):

$$\lambda^2+10\lambda+25=0. \qquad (4.40)$$

Знайдемо розв'язки характеристичного рівняння (4.40):

$$(\lambda+5)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=-5.$$

Як бачимо, характеристичне рівняння має два однакових дійсних кореня, тому, за формулами (4.9) диференціальне рівняння (4.39) має два дійсні лінійно незалежні частинні розв'язки:

$$y_1=e^{-5x}, \qquad y_2=xe^{-5x}, \qquad (4.41)$$

тепер, щоб отримати загальний розв'язок рівняння (4.39), y_1 та y_2 вигляду (4.41) підставимо у формулу (4.10):

$$y=C_1e^{-5x}+C_2xe^{-5x}. \qquad (4.42)$$

(4.42) - загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння другого порядку (4.39).

Завдання для самостійного розв'язання:

Розв'язати однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, знайти їх частинні та загальні розв'язки. У випадку, якщо задані початкові умови, розв'язати задачу Коші.

4.1. $y''+5y'+4y=0$.

4.2. $y''-7y'+10y=0$.

4.3. $y''-2y'+10y=0$.

4.4. $y''-2y'=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

4.5. $y''-4y'+29y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=7$.

Домашнє завдання

Виконати завдання 2, 3 III частини Індивідуального завдання.

Виконане завдання надіслати для перевірки.