

ЛЕКЦІЯ. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ. АБСОЛЮТНА ЗБІЖНІСТЬ. ЗНАКОПЕРЕМІЖНІ РЯДИ. ТЕОРЕМА ЛЕЙБНИЦА. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ РЯДІВ. ІНТЕГРУВАННЯ ТА ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. ТЕОРЕМА АБЕЛЯ.

#1 Знакопеременные ряды

Знакопеременным называется ряд, членами которого являются вещественные числа произвольного знака, например,

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \dots + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{1}{n^2} + \dots$$

Знакопеременный ряд называется *знакочередующимся*, если любые два его соседних члена имеют разные знаки, т.е. ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots, \quad a_n > 0.$$

Теорема Лейбница. Если элементы $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ образуют монотонно убывающую последовательность, стремящуюся к нулю, т.е.

если $a_n > a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд сходится, причем его сумма

положительна и меньше первого члена ряда: $0 < S < a_1$.

Следствие. Для знакочередующегося ряда, удовлетворяющего признаку сходимости Лейбница, остаток r_n по абсолютной величине меньше модуля первого своего члена: $|r_n| < a_{n+1}$, где $r_n = (-1)^{n+2} a_{n+1} + (-1)^{n+3} a_{n+2} + \dots$

2 Абсолютная и условная сходимость

Теорема. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, то знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится; и знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*,

если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится.

Примеры

1. Исследовать сходимость ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 4}; \quad a_n = \frac{n}{n^2 + 4}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2 + 4}.$$

По признаку Лейбница имеем: $1) \frac{n}{n^2 + 4} > \frac{n+1}{(n+1)^2 + 4}$ (проверить

самостоятельно); $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 4} = 0$. Значит, ряд *сходится*.

Составим ряд из модулей членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 4}$.

Необходимое условие сходимости ряда выполняется. Сравним ряд с расходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, тогда по признаку сравнения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2 + 4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 4} = 1, \quad \text{т.е. ряд из абсолютных величин расходится.}$$

Значит, исходный ряд *сходится условно*

2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5^n}$ *сходится абсолютно*, т.к. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ *сходится*, что

можно проверить, пользуясь признаком Даламбера.

3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin^2 \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$, то

исходный ряд *сходится*. Ряд составленный из абсолютных величин ведет себя так же как ряд с общим членом $\frac{1}{n}$, поскольку $1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2n}$. Поэтому он

расходится. Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ *сходится условно*.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{7n+3}$. Ряд *расходится*, так как не выполняется необходимое

условие сходимости ряда: $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{7n+3} = \frac{2}{7} \neq 0$.

3 Функциональные последовательности

Определение. Если членами ряда будут не числа, а функции от x , то ряд называется **функциональным**.

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Исследование на сходимость функциональных рядов сложнее исследования числовых рядов. Один и тот же функциональный ряд может при одних значениях переменной x сходиться, а при других – расходиться. Поэтому вопрос сходимости функциональных рядов сводится к определению тех значений переменной x , при которых ряд сходится.

Совокупность таких значений называется **областью сходимости**.

Так как пределом каждой функции, входящей в область сходимости ряда, является некоторое число, то пределом функциональной последовательности будет являться некоторая функция:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ **сходится** к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой точки x из рассматриваемого отрезка существует номер $N = N(\varepsilon, x)$, такой, что неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

выполняется при $n > N$.

При выбранном значении $\varepsilon > 0$ каждой точке отрезка $[a, b]$ соответствует свой номер n , следовательно, номеров, соответствующих всем точкам отрезка $[a, b]$, будет бесчисленное множество. Если выбрать из всех этих номеров наибольший, то этот номер будет годиться для всех точек отрезка $[a, b]$, т.е. будет общим для всех точек.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ **равномерно сходится** к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

выполняется при $n > N$ для всех точек отрезка $[a, b]$.

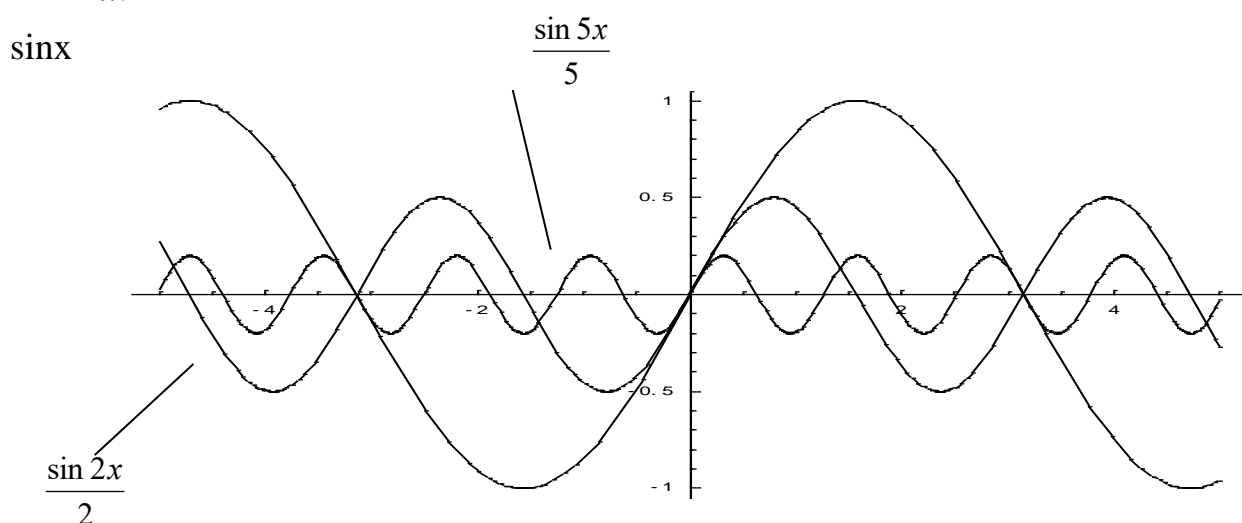
Пример. Рассмотрим последовательность $\frac{\sin x}{1}, \frac{\sin 2x}{2}, \dots, \frac{\sin nx}{n}, \dots$

Данная последовательность сходится на всей числовой оси к функции $f(x) = 0$, т.к.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin nx}{n} = 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Построим графики этой последовательности.

Как видно, при увеличении числа n график последовательности приближается к оси x .



3 Функциональные ряды

Определение. Ряд, членами которого являются функции переменной x , называется **функциональным рядом** $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$

Определение. **Частными (частичными) суммами** функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются функции $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, $n = 1, 2, \dots$

Определение. Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **сходящимся** в точке $(x=x_0)$, если в этой точке сходится последовательность его частных сумм. Предел последовательности $\{S_n(x_0)\}$ называется **суммой** ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ в точке x_0 .

Определение. Совокупность всех значений x , для которых сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **областью сходимости** ряда.

Определение. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется **равномерно сходящимся** на отрезке $[a, b]$, если равномерно сходится на этом отрезке последовательность частных сумм этого ряда.

Теорема. (Критерий Коши равномерной сходимости ряда)

Для равномерной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на отрезке $[a, b]$, необходимо

и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что при $n > N$ и любом целом $p > 0$ неравенство

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

выполнялось бы для всех x на отрезке $[a, b]$.

Или, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что $\forall n > N, \forall x \in [a, b]$ справедливо $|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Теорема Вейерштрасса (достаточный признак равномерной сходимости функционального ряда):

(Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815 – 1897) – немецкий математик)

Если члены функционального ряда $u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ по абсолютной величине не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами $\forall x \in [a, b]$, то функциональный ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[a, b]$. т.е., если числовой ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ сходится, и $|u_n(x)| \leq a_n \quad \forall x \in [a, b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится и притом *равномерно* на отрезке $[a, b]$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорантным*, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - *мажорируемым*.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Так как $|\cos nx| \leq 1$ всегда, то очевидно, что $\left| \frac{\cos nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$.

При этом известно, что общегармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ при $\alpha = 3 > 1$ сходится, то в соответствии с признаком Вейерштрасса исследуемый ряд *равномерно сходится* и притом в любом интервале.

Свойства равномерно сходящихся рядов.

1) Теорема о непрерывности суммы ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ - непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции и ряд сходится равномерно, то и его сумма $S(x)$ есть непрерывная функция на отрезке $[a, b]$.

Пример. 11.9. Функция $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ непрерывна на всей числовой прямой, так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ состоит из непрерывных функций и равномерно сходится на всей числовой прямой.

2) Теорема о почленном интегрировании ряда.

Равномерно сходящийся на отрезке $[a, b]$ ряд с непрерывными членами можно почленно интегрировать на этом отрезке, т.е. ряд, составленный из интегралов от его членов по отрезку $[a, b]$, сходится к интегралу от суммы ряда по этому отрезку.

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx; \quad \alpha, \beta \in [a, b]$$

Пример 12.1. Покажем, что ряд:

$$x + x^3 + \dots + x^{2n-1} + \dots \quad (12.1)$$

равномерно сходится на отрезке $[-1 + \varepsilon; 1 - \varepsilon]$, где ε — любое положительное число, меньшее 1, и найдем сумму ряда:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} + \dots \quad (12.2)$$

Решение. Члены ряда (12.1) по абсолютной величине не больше соответствующих членов сходящегося положительного числового ряда:

$$q + q^3 + \dots + q^{2n-1} + \dots, \quad (12.3)$$

где $q = 1 - \varepsilon$, $0 < 1 - \varepsilon < 1$. Следовательно, на заданном отрезке ряд (12.1) по признаку Вейерштрасса сходится равномерно.

Исходный ряд (12.1) при $|x| < 1$ является бесконечно убывающей геометрической прогрессией со знаменателем x^2 . Поэтому его сумма $s(x) = \frac{x}{1-x^2}$, т. е.

$$x + x^3 + \dots + x^{2n-1} + \dots = \frac{x}{1-x^2} \quad (|x| < 1).$$

В силу равномерной сходимости ряда (12.1) при $-1 + \varepsilon < x < 1 - \varepsilon$ его можно почленно интегрировать. Интегрирование проведем в пределах от 0 до x , где $|x| < 1$ (всегда можно найти такое $\varepsilon > 0$, чтобы $|x| \leq 1 - \varepsilon < 1$ и поэтому $-1 + \varepsilon < x < 1 - \varepsilon$). Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^x (t + t^3 + \dots + t^{2n-1} + \dots) dt &= \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} + \\ &+ \dots = \int_0^x \frac{t dt}{1-t^2}. \end{aligned}$$

Найдем интеграл, стоящий справа:

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t dt}{1-t^2} &= -\frac{1}{2} \int_0^x \frac{d(1-t^2)}{1-t^2} = -\frac{1}{2} \ln(1-t^2) \Big|_0^x = \\ &= -\frac{1}{2} \ln(1-x^2) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $|x| < 1$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2n}}{2n} + \dots = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) Теорема о почленном дифференцировании ряда.

Если члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходящегося на отрезке $[a, b]$ представляют собой непрерывные функции, имеющие непрерывные производные, и ряд, составленный из этих производных $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится на этом отрезке равномерно, то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно.

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}$$

Пример 12.2. Если почленно продифференцировать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, получится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, который равномерно сходится на всей числовой прямой. Значит, для суммы $s(x)$ исходного ряда:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Пример 12.3. Выясним, применима ли теорема 12.4 к ряду

$$(A): \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + \sin nx}{n^3} \right) \text{ на } [0; \pi].$$

Решение. После почленного дифференцирования данного ряда получается равномерно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$. Тем не менее теорема 12.4 неприменима в данном случае, так как ряд (A) расходится при всех значениях x . Например, при $x = 0$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, т. е. известный гармонический ряд. Расходимость ряда (A) при любом $x \in [0; \pi]$ следует из того, что $\frac{n^2 + \sin nx}{n^3} \geq \frac{n^2 - 1}{n^3}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n^3}$ расходится.

Замечание: На основе того, что сумма ряда является некоторой функцией от переменной x , можно производить операцию представления какой – либо функции в виде ряда (разложения функции в ряд), что имеет широкое применение при интегрировании, дифференцировании и других действиях с функциями.

4 Степенные ряды

Определение: Степенным рядом называется ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad (1)$$

$a_i = \text{const}$, $a = \text{const}$. В частности, если $a = 0$, то имеем ряд

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (2)$$

Ряд (1) приводится к ряду (2) заменой $x - a = y$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{xn}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{1 + \frac{1}{n}} \right| = |x|.$$

Получаем, что этот ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Теперь определим сходимость в граничных точках 1 и -1 .

При $x = -1$: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ ряд сходится по признаку Лейбница (см. *Признак Лейбница*).

При $x = 1$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ ряд расходится (гармонический ряд).

Теорема Абеля. (Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик)

Если степенной ряд (2) сходится при некотором значении $x = x_0 \neq 0$, то он сходится и притом абсолютно при всех значениях x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$.

Доказательство. По условию теоремы, так как члены ряда ограничены, то

$$|a_n x_1^n| \leq k,$$

где k – некоторое постоянное число. Справедливо следующее неравенство:

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n \leq k \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

Из этого неравенства видно, что при $x < x_1$ численные величины членов нашего ряда будут меньше (во всяком случае не больше) соответствующих членов ряда правой части записанного выше неравенства, которые образуют геометрическую прогрессию. Знаменатель этой прогрессии $\left| \frac{x}{x_1} \right|$ по условию

теоремы меньше единицы, следовательно, эта прогрессия представляет собой сходящийся ряд.

Поэтому на основании признака сравнения делаем вывод, что ряд $\sum |a_n x^n|$ сходится, а значит ряд $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно. \square

Таким образом, если степенной ряд $\sum a_n x^n$ сходится в точке x_1 , то он абсолютно сходится в любой точке интервала длины $2|x_1|$ с центром в точке $x = 0$.

Следствие: Если степенной ряд расходится при некотором значении $x = x_1$, то он расходится и при всех значениях x таких, что $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R , что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится. В точках $x = \pm R$ требуется дополнительное исследование для каждого конкретного ряда.

При этом число R называется **радиусом сходимости**.

Интервал $(-R, R)$ называется **интервалом сходимости**.

Замечание: Интервал сходимости может вырождаться в точку $R = 0$ или совпадать со всей осью OX : $R = \infty$.

Интервал может быть как замкнутым с одной или двух сторон, так и не замкнутым.

Определение: Радиус сходимости степенного ряда находится по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ или } R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Основные свойства степенных рядов.

1. Внутри интервала сходимости сумма степенного ряда непрерывна.
2. Степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать любое число раз внутри интервала сходимости. При этом радиус сходимости полученных степенных рядов не изменяется.

Примеры.

1. Найти область сходимости ряда $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Находим радиус сходимости $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n-1)!}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n-1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |n| = |\infty|$.

Следовательно, данный ряд сходится при любом значении x . Общий член этого ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

2. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{(n+2)3^n}$. Воспользуемся

признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-1)^{2(n+1)}(n+2)3^n}{(n+3)3^{n+1}(x-1)^{2n}} \right| = \frac{(x-1)^2}{3}.$$

При $\frac{(x-1)^2}{3} < 1$ ряд сходится, т.е. при $-\sqrt{3}+1 < x < 1+\sqrt{3}$ ряд сходится.

Проверим сходимость ряда на концах интервала сходимости. При $x = \pm\sqrt{3}+1$ имеем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm\sqrt{3})^{2n}}{(n+2)3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$. Расходимость ряда проверяется сравнением

с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Таким образом, интервал сходимости $x \in (-\sqrt{3}+1; 1+\sqrt{3})$.