

РЯДИ ФУР'Є. РОЗКЛАДАННЯ ФУНКЦІЙ З ПЕРІОДОМ $2l$ В РЯД ФУР'Є.

Примеры #1. Разложить в ряд Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -3 < x \leq 0, \\ x & \text{при } 0 < x < 3, \end{cases}$$

пользуясь разложением, найти сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$.

Решение. Поскольку функция кусочно-дифференцируема и $2l$ -периодическая, то можем разложить ее в ряд Фурье полагая $l = 3$ и разбивая интервал интегрирования на две части:

$$a_0 = \frac{1}{3} \left(\int_{-3}^0 0 \cdot dx + \int_0^3 x dx \right) = \frac{1}{3} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^3 = \frac{3}{2},$$

$$a_k = \frac{1}{3} \left(\int_{-3}^0 0 \cdot \cos k \frac{\pi}{3} x dx + \int_0^3 x \cos k \frac{\pi}{3} x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{3x}{k\pi} \sin k \frac{\pi}{3} x \Big|_0^3 - \frac{3x}{k\pi} \int_0^3 \sin k \frac{\pi}{3} x dx \right) =$$

$$= \frac{3}{k^2 \pi^2} \cos k \frac{\pi}{3} x \Big|_0^3 = \frac{3}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1],$$

$$b_k = \frac{1}{3} \left(\int_{-3}^0 0 \cdot \sin k \frac{\pi}{3} x dx + \int_0^3 x \sin k \frac{\pi}{3} x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{k\pi} \left(-x \cos k \frac{\pi}{3} x \Big|_0^3 + \int_0^3 \cos k \frac{\pi}{3} x dx \right) = \frac{3}{k\pi} (-1)^{k+1};$$

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k - 1}{k} \cos k \frac{\pi}{3} x + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin k \frac{\pi}{3} x \right) =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{3}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi (2k-1)^2} \cos \frac{2k-1}{3} \pi x + \frac{(-1)^k}{k} \sin k \frac{\pi}{3} x \right].$$

При $x = 0$ разложение примет вид $0 = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$,

откуда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Пример #2. Разложить в ряд Фурье $2l$ -периодическую функцию: $f(x) = |x|$ в интервале $[-1, 1]$.

Решение. Функция четная, полагая $l = 1$ имеем

$$a_0 = 2 \int_0^1 x dx = 1,$$

$$a_k = 2 \int_0^1 x \cos k\pi x dx = 2 \left(\frac{x}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \sin k\pi x dx \right) =$$

$$= \frac{2}{k^2 \pi^2} \cos k\pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{k^2 \pi^2} [(-1)^k - 1],$$

$$|x| = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos k\pi x = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}.$$

Пример #3. Разложить в ряд Фурье $2l$ -периодическую функцию: $f(x) = x/3$ в интервале $(-3,3]$.

Решение. Функция нечетная, полагая $l = 3$ имеем

$$b_k = \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{x}{3} \sin k \frac{\pi}{3} x dx = \frac{2}{9} \left(-\frac{3x}{k\pi} \cos k \frac{\pi}{3} x \Big|_0^3 + \frac{3}{k\pi} \int_0^3 \cos k \frac{\pi}{3} x dx \right) =$$

$$= \frac{2}{k\pi} (-1)^{k+1}.$$

Таким образом,

$$\frac{x}{3} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin k \frac{\pi}{3} x.$$

Пример #4. Разложить в ряд Фурье функцию: $f(x) = 10 - x$ при $5 < x < 15$

Решение. При $k = 0, l = 5$ имеем

$$a_0 = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10-x) dx = \frac{1}{5} \left(10x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_5^{15} = 0;$$

$$a_k = \frac{1}{5} \int_5^{15} (10-x) \cos k \frac{\pi}{5} dx =$$

$$= \frac{1}{5} \left((10-x) \frac{5}{k\pi} \sin k \frac{\pi}{5} x \Big|_5^{15} + \frac{5}{k\pi} \int_5^{15} \sin k \frac{\pi}{5} dx \right) =$$

$$= \frac{5}{k^2 \pi^2} \cos k \frac{\pi}{5} x \Big|_5^{15} = 0;$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{5} \int_5^{15} (10-x) \sin k \frac{\pi}{5} x dx = \\
&= \frac{1}{5} \left(-(10-x) \frac{5}{k\pi} \cos k \frac{\pi}{5} x \Big|_5^{15} - \frac{5}{k\pi} \int_5^{15} \cos k \frac{\pi}{5} x dx \right) = \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{25}{k\pi} \cos 3k\pi + \frac{25}{k\pi} \cos k\pi - \frac{25}{k^2 \pi^2} \sin k \frac{\pi}{5} x \Big|_5^{15} \right) = \frac{10}{k\pi} (-1)^k
\end{aligned}$$

Таким образом, по формуле (5) имеем

$$10-x = \frac{10}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin k \frac{\pi}{5} x.$$

Пример #5. Разложить в неполный ряд Фурье а) по косинусам, и б) по синусам функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$$

Решение. (а) При $k = 0$ имеем

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) dx \right) = \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\pi x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{8} \right) = \frac{\pi}{2}. \\
a_k &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos kx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \cos kx dx \right) = \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{k} \sin kx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin kx dx + \frac{\pi - x}{k} \sin kx \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin kx dx \right) = \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2k} \sin k \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k^2} \left(\cos k \frac{\pi}{2} - 1 \right) - \frac{\pi}{2k} \sin k \frac{\pi}{2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{k^2} \left(\cos k\pi - \cos k \frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{2}{\pi k^2} \left(2 \cos k \frac{\pi}{2} - \cos k\pi - 1 \right).
\end{aligned}$$

При $k = 1, 3, 5, \dots$ коэффициент $a_k = 0$; при $k = 4, 8, 12, \dots$ коэффициент $a_k = 0$; при $k = 2, 6, 10, \dots$ $a_k = -4$, т. е. при четном k , которые при делении на два дают нечетное число, коэффициенты $a_k \neq 0$, а такие числа будут $2(2k - 1)$.

Таким образом,

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4 \cos 2(2k-1)x}{2^2 (2k-1)^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

(б) Разложение по синусам находим по формуле:

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin kx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin kx dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x}{k} \cos kx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos kx dx - \frac{\pi - x}{k} \cos kx \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{1}{k} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos kx dx \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2k} \cos k \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k^2} \sin k \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2k} \cos k \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k^2} \sin k \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{4}{\pi k^2} \sin k \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Если k четное, то $b_k = 0$. Если k нечетное, то $b_k = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2}$.

Таким образом,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^2} \sin(2k-1)x.$$

Пример #6. Разложить в ряд Фурье функцию: $f(x) = x$ в интервале $(0, 2\pi)$.

Решение. При $k = 0$ имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x \cos kx}{k} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \cos kx dx \right) = -\frac{2}{k}.$$

Отсюда,

$$x = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin kx.$$

Пример #7. Сила тока протекающего в цепи имеет форму:

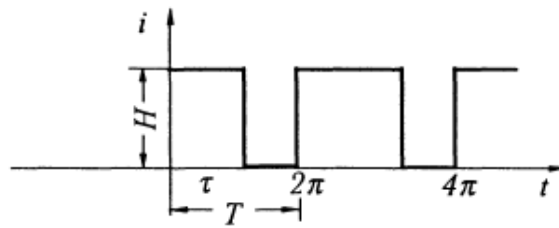


Рис. 15.6

Представить: а) 2π -периодическую функцию в виде ряда Фурье; б) T -периодическую функцию в виде ряда Фурье.

Решение. а) Запишем функцию в виде

$$f(t) = \begin{cases} H & (0 \leq t < \tau), \\ 0 & (\tau \leq t < 2\pi). \end{cases}$$

Поскольку функция 2π -периодична, то интегрируем ее по формулам (2) в промежутке $[0, 2\pi]$, с учетом того, что в интервале $[\tau, 2\pi]$ функция равна нулю

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau} H dt = \frac{H\tau}{\pi};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau} H \cos kt dt = \frac{H}{k\pi} \sin kt \Big|_0^{\tau} = \frac{H}{k\pi} \sin k\tau; \quad (k=1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau} H \sin kt dt = -\frac{H}{k\pi} (\cos k\tau - 1) = \frac{H}{k\pi} (1 - \cos k\tau); \quad (k=1, 2, \dots).$$

Коэффициенты Фурье зависят от амплитуды импульса H и от его длительности τ . Разложение функции в ряд Фурье имеет вид

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{H\tau}{2\pi} + \frac{H}{\pi} \left(\sin \tau \cos t + (1 - \cos \tau) \sin t + \frac{1}{2} \sin 2\tau \cos 2t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (1 - \cos 2\tau) \sin 2t + \dots \right) = \\ &= \frac{H\tau}{2\pi} + \frac{H}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} (\sin k\tau \cos kt + (1 - \cos k\tau) \sin kt) \right). \end{aligned}$$

Определим теперь амплитуды и фазы простых гармоник

$$A_k = \frac{H}{k\pi} \sqrt{\sin^2 k\tau + (1 - \cos k\tau)^2} = \frac{H}{k\pi} \sqrt{2 - 2 \cos k\tau} = \frac{2H}{k\pi} \sin \frac{k\tau}{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{\sin k\tau}{1 - \cos k\tau} = \operatorname{ctg} k \frac{\pi}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - k \frac{\tau}{2} \right),$$

отсюда $\varphi_k = \frac{\pi}{2} - k \frac{\tau}{2}.$

Разложение функции в ряд Фурье примет вид

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{2H}{\pi} \left(\frac{\tau}{4} + \sin \frac{\tau}{2} \sin \left(t + \frac{\pi}{2} - \frac{\tau}{2} \right) + \frac{1}{2} \sin \tau \sin \left(2t + \frac{\pi}{2} - \tau \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{3} \sin \frac{3\tau}{2} \sin \left(3t + \frac{\pi}{2} - \frac{3\tau}{2} \right) + \dots \right) = \frac{2H}{\pi} \left(\frac{\tau}{4} + \sin \frac{\tau}{2} \cos \left(t - \frac{\tau}{2} \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{2} \sin \tau \cos (2t - \tau) + \frac{1}{3} \sin \frac{3\tau}{2} \cos \left(3t - \frac{3\tau}{2} \right) \right) = \\
 &= \frac{H\tau}{2\pi} + \frac{2H}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin \frac{k\tau}{2} \cos \left(kt - \frac{k\tau}{2} \right).
 \end{aligned}$$

б) Принимаем период равным $T = 2l$ и находим

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\tau} H dt = 2H \frac{\tau}{T};$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^{\tau} H \cos \frac{2k\pi}{T} t dt = \frac{H}{k\pi} \sin \frac{2k\pi}{T} \tau; \quad (k=1, 2, \dots),$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^{\tau} H \sin \frac{2k\pi}{T} t dt = \frac{H}{k\pi} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{T} \tau \right); \quad (k=1, 2, \dots),$$

тогда

$$A_k = \frac{2H}{k\pi} \sin \frac{k\pi\tau}{T}; \quad \varphi_k = \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi\tau}{T}.$$

Полагая $T = \frac{2\pi}{\omega}$, запишем разложение функции в ряд Фурье

$$\begin{aligned}
 f(t) &= H \left(\frac{\tau}{T} + \frac{2}{\pi} \sin \pi \frac{\tau}{T} \cos \left(\omega t - \pi \frac{\tau}{T} \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{\pi} \sin 2\pi \frac{\tau}{T} \cos \left(2\omega t - 2\pi \frac{\tau}{T} \right) + \dots \right) = \\
 &= H \frac{\tau}{T} + \frac{2H}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sin k\pi \frac{\tau}{T} \cos k \left(\omega t - \frac{\pi\tau}{T} \right).
 \end{aligned}$$