

# ЗБІЖНОСТЬ ЗНАКОСТАЛИХ РЯДІВ: ІНТЕГРАЛЬНА ТА РАДИКАЛЬНА ОЗНАКИ КОШІ ДЛЯ ЧИСЛОВИХ РЯДІВ.

**#1 Примеры.** Исследовать сходимость ряда используя радикальный признак Коши

1. Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n$ .

$$\text{Достаточный признак: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 1/n^2}{3 + 5/n^2} = \frac{2}{3} < 1.$$

По радикальному признаку Коши ряд сходится. Проверку необходимого признака сходимости в данном случае можно было бы и не делать.

2. Доказать:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$

Рассмотрим ряд с общим членом  $a_n = \frac{n^n}{(2n)!}$ . Доказав его сходимость, в силу необходимого признака сходимости ряда, получим данное равенство. Действительно, по признаку Даламбера ряд сходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} (2n)!}{(2(n+1))! n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \left( \frac{n+1}{n} \right)^n (2n)!}{(2n)! (2n+1)(2n+2)} = 0 < 1,$$

$$\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \right).$$

3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}.$$

По признаку Даламбера

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)(2n+3)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)}{(3n+2)} = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится.} \end{aligned}$$

4. Определить сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} \right)^n$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{5}{n^2}} = \frac{2}{3} < 1$$

По радикальному признаку Коши ряд сходится.

5. Определить сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Т.е. признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Проверим выполнение необходимых условий сходимости. Как было сказано выше, если ряд сходится, то общий член ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0,$$

таким образом, необходимое условие сходимости не выполняется, значит, ряд расходится.

6.

Исследовать на сходимость ряды: а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$ .

Решение. а) Воспользуемся радикальным признаком Коши.

Находим предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} = K.$

Так как предел  $K < 1$ , то ряд сходится.

б) Находим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}.$$

Так как предел больше 1, то ряд расходится.

# 2 Примеры. Исследовать сходимость ряда используя интегральный признак сходимости Коши

1. Исследовать сходимость ряда.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ .

Положим  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$ . Функция  $f(x)$  непрерывна при  $x \geq 2$ , убывает с

возрастанием  $x$ ,  $f(x) > 0 \forall x \in [2; +\infty)$ . Проверим существование несобственного интеграла от этой функции. По определению

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_2^A \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_2^A =$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Итак, несобственный интеграл сходится, отсюда следует сходимость ряда.

2.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  ( $p > 0$ ), тогда  $f(x) = \frac{1}{x^p} > 0$  ( $x \geq 1$ ), монотонно убывающая

функция. Рассмотрим несобственный интеграл ( $p \neq 0$ ).

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^p} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{x^{-p+1}}{1-p} \Big|_1^A = \begin{cases} \frac{1}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p < 1 \end{cases}$$

При  $p = 1$  имеем  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{dx}{x} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^A = \infty$ .

Итак, ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \begin{cases} \text{сходится, при } p > 1 \\ \text{расходится, при } p \leq 1 \end{cases}$ .

3. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+2)ln^2(2n+3)} \quad a_n = \frac{1}{(n+2)ln^2(2n+3)} > 0.$$

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)ln^2(2n+3)}$ . По интегральному признаку

сходимости Коши ряд сходится, так как несобственный интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{(2x+3)ln^2(2x+3)} = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \int_2^A \frac{d \ln(2x+3)}{ln^2(2x+3)} = \frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow \infty} \left( \frac{-1}{\ln(2x+3)} \right) \Big|_2^A =$$

$$= \frac{1}{2 \ln 7}, \text{ т.е. сходится.}$$

Применяя предельный признак сравнения, находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)ln^2(2n+3)}{(n+2)ln^2(2n+3)} = 2.$$

Отсюда следует сходимость исследуемого ряда.

4.

Исследовать сходимость рядов: а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)^2}$ ;

б)  $\frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \dots$ ; в)  $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \dots$

**Решение.** а) Заменяем общий член ряда непрерывной функцией  $f(x) = \frac{1}{(3x-1)^2}$  и исследуем на сходимость несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(3x-1)^2} = -\frac{1}{3} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{1}{3x-1} \Big|_1^{\beta} = -\frac{1}{3} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3\beta-1} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{6}.$$

б) Найдем сначала для ряда общий член

$$\frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} + \dots + \frac{1}{1+n^2} + \dots$$

Функция  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ; а интеграл  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x \Big|_1^{\beta} = \frac{\pi}{4}$ .

Интеграл сходится, следовательно, по интегральному признаку Коши сходится и ряд.

в) Найдем общий член ряда

$$\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

и рассмотрим интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln \ln x \Big|_2^{\beta} = \infty.$$

Нижний предел несобственного интеграла выбираем в соответствии с областью существования функции. Интеграл расходится, поэтому согласно интегральному признаку расходится и ряд.

### # 3 Примеры.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

*Признак Раабе.* Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] = R,$$

то при  $R > 1$  ряд (1) сходится, а при  $R < 1$  ряд расходится.

**2.6. Исследовать на сходимость**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$ .

**Решение.** Воспользуемся признаком Раабе. Находим  $a_{n+1}$

член ряда:  $a_{n+1} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!(2n+3)}$ ; вычисляем предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1 \right) n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2}.$$

Здесь  $R > 1$ , следовательно, ряд сходится.

*Признак Куммера.* Пусть ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$  расходится. Если существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1} \right) = K$ , то при  $K > 0$  ряд (1) сходится, а при  $K < 0$  — расходится.

**Исследовать на сходимость ряд**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} \frac{1}{2n}$ .

**Решение.** Воспользуемся признаком сходимости Куммера.

Возьмем  $c_n = n$ , такой выбор возможен, так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  расходится. В этом случае

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n \frac{(2n-1)!(2n+3)!(2n+2)}{(2n+1)!2n(2n+1)!} - (n+1) \right] &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{(2n+3)(n+1)}{2n+1} - (n+1) \right] = 1 \end{aligned}$$

Здесь  $K > 0$ , следовательно, ряд сходится.

*Признак Бертрانا.* Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = B,$$

то при  $B > 1$  ряд (1) сходится, а при  $B < 1$  — расходится.

**2.8.** Исследовать на сходимость ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{n^n}{e^n}$ .

**Решение.** Находим  $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}}$ .

Воспользуемся признаком сходимости Бертрана. Вычисляем предел

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left[ n \left( \frac{n^n}{n! e^n} \frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n \left[ n \left( \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} - 1 \right) - 1 \right] = - \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = -\infty. \end{aligned}$$

Здесь  $B < 1$ , следовательно ряд расходится.