## Практичні заняття за темою лекції (17.04.2020, 20.04.2020)

**Приклад 1.** Розв'язати диференціальне рівняння $y''+4y=x$.

*Розв'язання.* Загальний розв'язок такого рівняння знаходимо у вигляді:

$$y_{з.н.}=y_{з.о.}+y_{ч.н.}.$$

Спочатку розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y''+4y=0$, та складемо його характеристичне рівняння $k^2+4=0$, корені якого будуть $k_{1,2}=\pm 2i$. Звідки можна записати:

$$y_{з.о.}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

Права частина заданого рівняння має спеціальний вигляд, причому контрольне число $\gamma=\alpha+\beta i=0$ не є коренем характеристичного рівняння. А тому $y_{ч.н.}=Ax+B$. Для обчислення коефіцієнтів $A$ та $B$ знайдемо похідні $y'_{ч.н.}=A$ і $y''_{ч.н.}=0$ та підставимо їх значення в умову диференціального рівняння $4(Ax+B)=x$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x$ маємо систему рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 4A=1, \\ x^0 & 4B=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\frac{1}{4},\ B=0.$$

Отже, $y_{ч.н.}=\frac{1}{4}x$, відповідно $y_{з.н.}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}x$.

*Відповідь:* $y_{з.н.}=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{4}x$.

**Приклад 2.** Розв'язати рівняння $y''-3y'=2-3x$.

*Розв'язання.* Загальний розв'язок даного рівняння знаходимо у вигляді: $y_{з.н.}=y_{з.о.}+y_{ч.н.}$.

Розглянемо відповідне однорідне диференціальне рівняння $y''-3y'=0$ та його характеристичне рівняння $k^2-3k=0$, корені якого будуть $k_1=0$ та $k_2=3$. Отже $y_{з.о.}=C_1+C_2e^{3x}$.

Права частина заданого рівняння є спеціального виду. де $\alpha = 0, \beta = 0, f(x) = 2 - 3x$ . Контрольне число $\gamma = 0$ та дорівнює одному кореню характеристичного рівняння. Таким чином, $y_{\text{ч.н.}}$ можна підібрати за правою частиною, тобто:

$$y_{\text{ч.н.}} = (Ax + B) \cdot x = Ax^2 + Bx .$$

Коефіцієнти $A$ та $B$ знаходимо вже відомим методом:

$$y'_{\text{ч.н.}} = 2Ax + B,\ y''_{\text{ч.н.}} = 2A .$$

$$2A - 3(2Ax + B) = 2 - 3x ,$$

$$2A - 6Ax - 3B = 2 - 3x ,$$

$$\left.\begin{array}{l| l} x^1 & -6A = -3 \\ x^0 & 2A - 3B = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{3} .$$

Таким чином, $y_{\text{ч.н.}} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$ , а $y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$ .

*Відповідь:* $y_{\text{з.н.}} = C_1 + C_2 e^{3x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x$ .

**Приклад 3.** Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3 .$$

*Розв'язання.* Як відомо, $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$ . Знайдемо $y_{\text{з.н.}}$ : $y'' - 6y' + 9y = 0$ , $k^2 - 6k + 9 = 0 \Rightarrow k_{1.2} = 3 \Rightarrow y_{\text{з. о.}} = e^{3x}(C_1 + C_2 x)$ .

Визначимо контрольне число:

$$\gamma = \alpha + \beta i,\ \alpha = 0,\ \beta = 0 \Rightarrow \gamma = 0,\ \gamma \neq k_{1,\,2} .$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = Ax^2 + Bx + C$ . Знаходимо $y'_{\text{ч.н.}} = 2Ax + B,\ y''_{\text{ч.н.}} = 2A$ та підставимо ці вирази у задане диференціальне рівняння:

$$2A - 12Ax - 6B + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 2x^2 - x + 3 ,$$

$$\left.\begin{array}{l| l} x^2 & 9A = 2, \\ x^1 & -12A + 9B = -1, \\ x^0 & 2A - 6B + 9C = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{2}{9},\ B = \frac{5}{27},\ C = \frac{11}{27}.$$

Таким чином:

$$y_{\text{ч.н.}} = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27} ,$$

а $y_{з.н.} = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

*Відповідь:* $y_{з.н.} = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

**Приклад 4.** Розв'язати рівняння $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

*Розв'язання.* Згідно з теоремою про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$

Виконуючи всі дії, аналогічно попереднім, маємо:

$$2y'' - y' - y = 0,\ 2k^2 - k - 1 = 0,\ k_1 = 1,\ k_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$y_{з.о.} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}}.$$

Так як $\alpha = 2, \beta = 0$, то $\gamma = 2,\ \gamma \neq k_{1,2}$ тоді:

$$y_{ч.н.} = (Ax + B)e^{2x},$$

$$y'_{ч.н.} = 2e^{2x}(Ax + B) + e^{2x} \cdot A = e^{2x}(2Ax + 2B + A),$$

$$y''_{ч.н.} = 2e^{2x}(2Ax + 2B + A) + e^{2x}(2A) = e^{2x}(4Ax + 4A + 4B).$$

Маємо:

$$2e^{2x}(4Ax + 4A + 4B) - e^{2x}(2Ax + 2B + A) - e^{2x}(Ax + B) = 4xe^{2x}.$$

Скоротимо обидві частини рівняння на $e^{2x}$:

$$8Ax + 8A + 8B - 2Ax - 2B - A - Ax - B = 4x,$$

$$5Ax + 7A + 5B = 4x.$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 5A = 4, \\ x^0 & 7A + 5B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{4}{5},\ B = -\frac{28}{25}.$$

$y_{ч.н.} = \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}$, а $y_{з.н.} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}$.

*Відповідь:* $y_{з.н.} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{x}{2}} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}$.

**Приклад 5.** Розв'язати рівняння $y''-2y'+y=e^x(5-x)$.

*Розв'язання.* Відповідно до теореми про структуру загального розв'язку неоднорідного диференціального рівняння:

$$y_{з.н.}=y_{з.о.}+y_{ч.н.},\ y''-2y'+y=0,\ k^2-2k+1=0,\ k_{1,2}=1,$$

$$y_{з.о.}=e^x(C_1+C_2x).$$

Враховуючи праву частину рівняння, маємо:

$$\alpha=1,\ \beta=0\Rightarrow\gamma=1=k_{1.2},$$

$$y_{ч.н.}=e^x(Ax+B)\cdot x^2=e^x(Ax^3+Bx^2),$$

$$y'_{ч.н.}=e^x(Ax^3+Bx^2+3Ax^2+2Bx),$$

$$y''_{ч.н.}=e^x(Ax^3+Bx^2+3Ax^2+2Bx+3Ax^2+2Bx+6Ax+2B)=$$

$$=e^x(Ax^3+Bx^2+6Ax^2+4Bx+6Ax+2B).$$

Підставимо $y_{ч.н.}, y'_{ч.н.}, y''_{ч.н.}$ в задане рівняння та скоротимо обидві частини на $e^x$:

$$6Ax+2B=5-x,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} x^1 & 6A=-1, \\ x^0 & 2B=5 \end{array}\right\}\Rightarrow A=-\frac{1}{6},\ B=\frac{5}{2}.$$

$$y_{ч.н.}=x^2e^x\left(-\frac{x}{6}+\frac{5}{2}\right)=e^x\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{5}{2}x^2\right),$$

$$y_{з.н.}=C_1e^x+C_2xe^x+e^x\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{5}{2}x^2\right).$$

*Відповідь:* $y_{з.н.}=C_1e^x+C_2xe^x+e^x\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{5}{2}x^2\right).$

**Приклад 6.** Розв'язати диференціальне рівняння:

$$y'' + 2y' + 10y = 5\sin 4x - 3\cos 4x .$$

*Розв'язання.* Загальний розв'язок такого рівняння будемо шукати у вигляді:

$$y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.} .$$

Для того, щоб знайти $y_{з.о.}$ запишемо однорідне диференціальне рівняння $y'' + 2y' + 10y = 0$ та його характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 10 = 0$, корені якого $k_{1,2} = -1 \pm 3i$. Таким чином, $y_{з.о.} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

За правою частиною рівняння $\alpha = 0, \beta = 4$, тобто $\gamma = \alpha \pm \beta i = \pm 4i, \gamma \neq k_{1,2}$, а отже, $y_{ч.н.} = A\sin 4x + B\cos 4x$. Знайдемо

$$y'_{ч.н.} = 4A\cos 4x - 4B\sin 4x \text{ та } y''_{ч.н.} = -16A\sin 4x - 16B\cos 4x .$$

Підставимо їх значення в умову. Тоді маємо:

$$-16A\sin 4x - 16B\cos 4x + 8A\cos 4x - 8B\sin 4x + 10A\sin 4x + 10B\cos 4x = \\ = 5\sin 4x - 3\cos 4x .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 4x$ та $\cos 4x$ одержимо систему рівнянь:

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos 4x & -6A - 8B = 5, \\ \sin 4x & 8A - 6B = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow A = -0,54,\ B = -0,22 .$$

Отже, $y_{ч.н.} = -0,54\sin 4x - 0,22\cos 4x$, а відповідно

$$y_{з.н.} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - 0,54\sin 4x - 0,22\cos 4x .$$

*Відповідь:*

$$y_{з.н.} = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - 0,54\sin 4x - 0,22\cos 4x.$$

**Приклад 7.** Розв'язати рівняння $y'' + 9y = -\frac{17}{2}\cos 2x$.

*Розв'язання.* Аналогічно попередньому випадку $y_{з.н.} = y_{з.о.} + y_{ч.н.}$ Знайдемо $y_{з.о.}$:

$$y'' + 9y = 0,\ k^2 + 9 = 0 \Rightarrow k_{1.2} = \pm 3i \Rightarrow\ y_{з.о.} = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x .$$

За правою частиною рівняння маємо $\alpha = 0,\ \beta = 2,$ тоді $\gamma = \alpha \pm \beta i = \pm 2i, \gamma \neq k_{1,2} \Rightarrow y_{\text{ч.н.}} = A\cos 2x + B\sin 2x$ Знайдемо $A$ та $B$. Для цього запишемо:

$y'_{\text{ч.н.}} = -A\sin 2x + 2B\cos 2x$ та $y''_{\text{ч.н.}} = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$. Підставимо одержані вирази в задане диференціальне рівняння:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 9A\cos 2x + 9B\sin 2x = -\frac{17}{2}\cos 2x,$$

$$\text{тоді } 5A\cos 2x + 5B\sin 2x = -\frac{17}{2}\cos 2x,$$

$$\left.\begin{array}{l|l} \cos 2x & 5A = -\dfrac{17}{2}, \\ \sin 2x & 5B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B = 0,\ A = -\frac{17}{10} = -1,7.$$

Таким чином, $y_{\text{ч.н.}} = -1,7\cos 2x$, а відповідно:

$$y_{\text{з.н.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - 1,7\cos 2x.$$

*Відповідь:* $y_{\text{з.н.}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - 1,7\cos 2x.$

**Приклад 8.** Розв'язати задачу Коші:

$$y'' + 4y' - 5y = 2\sin 3x,\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

*Розв'язання.* У даному випадку необхідно спочатку повторити всі дії, які були наведені в попередніх прикладах, а потім скористатися початковими умовами. Отже, $y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}$. Знайдемо $y_{\text{з.о.}}$:

$$y'' + 4y' - 5y = 0,\ k^2 + 4k - 5 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = -5.$$

$$y_{\text{з.о.}} = C_1e^{x} + C_2e^{-5x}.$$

Так як $\alpha = 0,\ \beta = 3 \Rightarrow \gamma = \alpha \pm \beta i = 3i, \gamma \neq k_{1,2}$, то:

$$y_{\text{ч.н.}} = A\cos 3x + B\sin 3x,$$

$$y'_{\text{ч.н.}} = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$

$$y''_{\text{ч.н.}} = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x.$$

Обчислимо $A$ та $B$:

$$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 12A\sin 3x + 12B\cos 3x - 5A\cos 3x - 5B\sin 3x = 2\sin 3x,$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 3x \\ \sin 3x \end{array} \left| \begin{cases} -9A+12B-5A=0, \\ -9B-12A-5B=2 \end{cases} \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -14A+12B=0, \\ -12A-14B=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7A+6B=0, \\ -6A-7B=1 \end{cases} \Rightarrow A=-\frac{6}{85}, B=-\frac{7}{85}.$$

Отже, $y_{\text{ч.н.}} = -\frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x$, а відповідно:

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x} - \frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x.$$

Скористаємось початковою умовою $y(0)=1$:

$$1 = C_1 + C_2 - \frac{6}{85}.$$

Запишемо $y'_{\text{з.н.}} = C_1 e^{x} - 5C_2 e^{-5x} + \frac{18}{85}\sin 3x - \frac{21}{85}\cos 3x$, та скористаємось умовою $y'(0)=0$:

$$0 = C_1 - 5C_2 - \frac{21}{85}.$$

Об'єднаємо одержані рівняння в систему:

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2 - \frac{6}{85}, \\ 0 = C_1 - 5C_2 - \frac{21}{85}, \end{cases}$$

та знайдемо $C_1 = \frac{238}{255}, C_2 = \frac{7}{51}$. Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння, який відповідає початковим умовам:

$$y = \frac{238}{255}e^{x} + \frac{7}{51}e^{-5x} - \frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x.$$

*Відповідь:* $y = \frac{238}{255}e^{x} + \frac{7}{51}e^{-5x} - \frac{6}{85}\cos 3x - \frac{7}{85}\sin 3x$.

**Домашнє завдання**

Завершити виконання ІІІ частини Індивідуального завдання.

Виконане завдання надіслати для перевірки на адресу i.morachkovska@gmail.com або TELEGRAM 0502983683