Розкладання функцій в ряди Маклорена та Тейлора.

Приклад 2.18 Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = xe^{-x^2}$.

Розв'язування

Використаємо розвинення (2.17), підставивши замість x величину $-x^2$. Маємо

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + ..., \quad -\infty < x < +\infty .$$

Помноживши обидві частини останньої рівності на x, отримаємо

$$xe^{-x^2} = x - \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2!} - \frac{x^7}{3!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!} + ..., \quad -\infty < x < +\infty .$$

Приклад 2.19 Функцію $y = \frac{1}{x}$ розвинути в ряд Тейлора з центром в точці $x_0 = 3$.

Розв'язування

За формулою (2.11) маємо:

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad y''(x) = \frac{2}{x^3},\ y'''(x) = -\frac{2\cdot 3}{x^4}, \ldots, y^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}};$$

звідки

$$y(3) = \frac{1}{3}, \quad y'(3) = -\frac{1}{3^2}, \qquad y''(3) = \frac{2!}{3^3}, \ldots, \qquad y^{(n)}(3) = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}};$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-3) + \frac{2!}{3^3}(x-3)^2 + ... + (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}(x-3)^n + ...$$

Розкласти в ряд Маклорена функцію

1. $y = xe^{-3x}$

2. $y = \sin^2 x;$

3. $y = \frac{1}{\sqrt{1+x}};$

4. $y = \frac{1}{1-x^2};$

5. $y = \ln(1-3x);$

6. $y = \cos^2 x;$

7. $y = \frac{3}{(x-2)(x+1)};$

8. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}};$