

# Невизначений інтеграл

## Заняття 1. Невизначений інтеграл

**Означення 0.1.** Функція  $F(x)$  називається первісною для функції  $f(x)$  на деякому проміжку, якщо на цьому проміжку виконується умова

$$F'(x) = f(x).$$

**Означення 0.2.** Множина всіх первісних функцій для функції  $f(x)$  називається невизначеним інтегралом і позначається

$$\int f(x) dx.$$

Тут  $f(x)$  називається підінтегральною функцією,  $f(x)dx$  називається підінтегральним виразом,  $x$  — змінна інтегрування,  $dx$  — диференціал змінної інтегрування.

Таким чином, якщо функція  $F(x)$  є первісною для функції  $f(x)$ , тоді

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Тут  $C$  — довільна стала, яка називається сталою інтегрування.

## Властивості невизначеного інтеграла

1.  $\left(\int f(x) dx\right)' = f(x),$
2.  $d\left(\int f(x) dx\right) = f(x)dx,$
3.  $\int F'(x) dx = F(x) + C,$
4.  $\int dF(x) = F(x) + C,$
5.  $\int A \cdot f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx, \quad A = const,$
6.  $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

*Зауваження 0.1.* З властивості 4 випливає, що змінною інтегрування може бути функція!

## Таблиця основних інтегралів

1.  $\int 0 \cdot dx = C.$
2.  $\int 1 \cdot dx = x + C.$
3.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$
4.  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$
5.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$
6.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0, a \neq 1).$
7.  $\int e^x dx = e^x + C.$
8.  $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
9.  $\int \cos x dx = \sin x + C.$
10.  $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$
11.  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$
12.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C.$
13.  $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
14.  $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C.$
15.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C.$
16.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a} + C.$
17.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left( x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right) + C.$

## Інтегрування. Метод розкладу

Знаходження інтеграла називається інтегруванням.

Найважливі методи інтегрування: метод розкладу, метод підстановки та інтегрування частинами.

Усі методи інтегрування зводять невизначений інтеграл до табличного. Щоб звести інтеграл до табличного, як правило, підінтегральну функцію доводиться перетворювати.

Найпростіший метод інтегрування — це метод розкладу, він базується на властивостях 5 і 6 невизначеного інтеграла:

$$\int A \cdot f(x) dx = A \cdot \int f(x) dx, \quad A = \text{const},$$
$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Тобто, якщо підінтегральна функція є сума двох (або більше) функцій, тоді одержимо два (або більше) інтегралів. Також потрібно виносити стали множники за знак інтеграла.

*Приклад 0.1.*

$$\begin{aligned} \int \left( 5x^2 - 3x + \frac{2}{x} \right) dx &= \int 5x^2 dx - \int 3x dx + \int \frac{2}{x} dx = \\ &= 5 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 2 \int \frac{1}{x} dx = 5 \frac{x^{2+1}}{2+1} - 3 \frac{x^{1+1}}{1+1} + 2 \ln |x| + C = \\ &= 5 \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} + 2 \ln |x| + C. \end{aligned}$$

Підінтегральна функція містить суму трьох доданків (функцій). Тому вихідний інтеграл було розкладено на три інтеграла, потім винесли стали множники за знак інтегралів. Одержані інтеграли є табличними (вони містять степеневу функцію).

Звернемо увагу на те, що використовуються різні формули для інтегрування степеневих функцій: перші два інтеграла — формула 3 таблиці, останній інтеграл — формула 5.

*Приклад 0.2.*

$$\begin{aligned} \int (1 - \sqrt{x})^2 dx &= \int (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = \int dx - 2 \int \sqrt{x} dx + \int x dx = \\ &= x - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx + \frac{x^{1+1}}{1+1} = x - 2 \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{2} x^2 + C = x - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} x^2 + C. \end{aligned}$$

Спочатку скористалися рівністю:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Нагадаємо, що  $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ . Тут, як і при диференціюванні функцій, радикал було уявлено у вигляді степеневий функції

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[k]{x^n} = x^{\frac{n}{k}}.$$

*Зауваження 0.2.* Не треба після інтегрування кожного доданка ставити сталу інтегрування, тому що сума сталих є також стала, яку ми ставимо у кінці.

*Приклад 0.3.*

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^3 - 5}{x^2} dx &= \int \frac{6x^3}{x^2} dx - \int \frac{5}{x^2} dx = 6 \int x dx - 5 \int x^{-2} dx = \\ &= 6 \frac{x^{1+1}}{1+1} - 5 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = 3x^2 + 5x^{-1} + C = 3x^2 + \frac{5}{x} + C. \end{aligned}$$

Виконуючі почленне ділення, одержали два доданка (два інтеграла). Тут були використовані наступні властивості степеневий функції:

$$\frac{x^n}{x^k} = x^{n-k}, \quad \text{тоді} \quad \frac{1}{x^2} = x^{-2}.$$

**Завдання.** Знайти невизначені інтеграли, користуючись таблицею інтегралів та їх властивості.

$$\begin{aligned} \int \left( 5x^2 - 4x + 3 - \frac{2}{x} \right) dx, & \quad \int \frac{dx}{x^2}, & \quad \int \frac{2x+3}{x^3} dx, \\ \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx, & \quad \int \frac{3x^3 - \sqrt{x} + 5x}{x} dx, & \quad \int \left( \frac{1-x}{x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

## Заняття 2. Підведення сталих під знак диференціала

Нагадаємо, що змінною інтегрування може бути функція. Більш того, можна довести, що формули інтегрування залишаться незмінними, якщо незалежну змінну  $x$  замінити на будь-яку диференційовну функцію  $u(x)$ . Тобто, якщо

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u(x)) du(x) = F(u(x)) + C,$$

або

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

Ця властивість дозволяє одержати таблицю інтегралів в наступному вигляді:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C, \dots,$$

де  $u$  — будь-яка диференційовна функція

Наприклад, розглянемо табличний інтеграл

$$\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C.$$

Тоді, за цією теоремою, маємо

$$\int \sin x d(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2} + C,$$

або

$$\int \ln x d(\ln x) = \frac{\ln^2 x}{2} + C.$$

Таким чином, в першому випадку змінною інтегрування є функція  $u = \sin x$ , у другому — функція  $u = \ln x$ . Справді, підставимо в перший інтеграл символ  $u$  замість  $\sin x$ . Тоді маємо табличний інтеграл

$$\int \sin x d(\sin x) = \int u = \sin x \parallel = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

Нагадаємо формулу диференціала

$$df(x) = f'(x)dx,$$

і наведемо деякі перетворення диференціала

$$\begin{aligned}d(x + b) &= (x + b)'dx = (x' + b')dx = (1 + 0)dx = dx, & \Rightarrow dx &= d(x + b), \\d(ax) &= (ax)'dx = a(x)'dx = a dx, & \Rightarrow dx &= \frac{1}{a} dx, \\d(ax + b) &= (ax + b)'dx = a dx & \Rightarrow dx &= \frac{1}{a} d(ax + b).\end{aligned}$$

Тут  $a = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ .

Таким чином, до виразу, що міститься під знаком диференціала, можна завжди додати сталу  $b$ , тобто

$$\int f(x) dx = \int f(x) d(x + b).$$

Якщо вираз, що міститься під знаком диференціала, помножити на сталу (число)  $a$ , то весь інтеграл потрібно розділити на цю сталу  $a$ :

$$\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int f(x) d(ax).$$

Таким чином, маємо корисно правило підведення сталих під знак диференціала:

$$\int f(x) dx = \frac{1}{a} \int f(x) d(ax + b).$$

*Приклад 0.4.*

$$\begin{aligned}\int \cos(7x - 5) dx &= \frac{1}{7} \int \cos(7x - 5) d(7x) = \\&= \frac{1}{7} \int \cos(7x - 5) d(7x - 5) = \frac{1}{7} \sin(7x - 5) + C.\end{aligned}$$

В таблиці інтегралів аргумент підінтегральної функції і змінна інтегрування це одна і та же величина, а в цьому прикладі різні величини: аргумент функції дорівнює  $(7x - 5)$ , а змінна інтегрування — це  $x$ . Тому тут було зроблено перетворення диференціала: спочатку занесли під знак диференціала множник 7; далі додали сталу  $-5$ . Після перетворення змінна інтегрування також дорівнює  $(7x - 5)$  і ми маємо табличний інтеграл.

В цьому прикладі можна зробити заміну змінної інтегрування:

$$\begin{aligned}\int \cos(7x - 5) dx &= \left\| \begin{array}{l} u = 7x - 5, \\ du = (7x - 5)'dx = 7 dx, \\ dx = \frac{1}{7} du \end{array} \right\| = \frac{1}{7} \int \cos u du = \\&= \frac{1}{7} \sin u + C = \frac{1}{7} \sin(7x - 5) + C.\end{aligned}$$

Схема така: аргумент підінтегральної функції не дорівнює змінній інтегрування. Тому аргумент підінтегральної функції позначаємо як допоміжну функцію  $u$ . В цьому прикладі

$$u = 7x - 5.$$

Обчислюємо диференціал цієї функції

$$du = u' dx, \quad \Rightarrow du = (7x - 5)' dx = 7 dx.$$

Звідси знаходимо диференціал вихідної змінної інтегрування  $dx$ . В нашому випадку

$$dx = \frac{1}{7} du$$

і підставляємо його в вихідний інтеграл. Одержимо табличний інтеграл. Останній крок: ми повинні повернутися до вихідної змінної  $x$ .

Яким засобом користуватися? — Що кому більш сподобається!

*Приклад 0.5.*

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x - 3} dx &= \frac{1}{2} \int (2x - 3)^{\frac{1}{2}} d(2x - 3) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2x - 3)^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{1}{3} (2x - 3)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{2x - 3} dx &= \left\| \begin{array}{l} u = 2x - 3, \\ du = (2x - 3)' dx = 2 dx, \\ dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int (u)^{\frac{1}{2}} du = \\ &= \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{1}{2} + 1}}{\frac{1}{2} + 1} + C = \frac{1}{3} (2x - 3)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

**Завдання.** Користуючись диференціалами

$$dx = d(x + b), \quad dx = \frac{1}{a} d(ax), \quad dx = \frac{1}{a} d(ax + b).$$

знайти невизначені інтеграли.

$$\begin{array}{lll} \int \cos x dx, & \int \cos(2x) d(2x), & \int \cos(2x) dx, \\ \int \cos(2x - 1) d(2x - 1), & \int \cos(2x - 1) dx, & \int \cos(1 - 2x) dx, \\ \int \sin x dx, & \int \sin(3 + x) d(3 + x), & \int \sin(3 - 4x) dx, \end{array}$$

$$\int (2+x)^7 d(2+x), \quad \int (2+x)^7 dx, \quad \int (2-3x)^{11} dx,$$

$$\int (2-3x)^{11} dx, \quad \int \sqrt{2-3x} dx, \quad \int \sqrt{(8-5x)^3} dx,$$

$$\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2}, \quad \int \frac{dx}{(x+3)^2}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-7x)^2}},$$

$$\int e^{2x} d(2x), \quad \int e^{2x} dx, \quad \int e^{-x} dx,$$

$$\int e^{3x-2} dx, \quad \int e^{3-2x} dx, \quad \int 2^{8-5x} dx,$$

$$\int \frac{dx}{x}, \quad \int \frac{d(x-1)}{x-1}, \quad \int \frac{dx}{x-1}, \quad \int \frac{dx}{2x-1}, \quad \int \frac{dx}{2-3x},$$

$$\int \frac{d(3x)}{\sqrt{1-(3x)^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-9x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int \frac{d(5x)}{1+(5x)^2}, \quad \int \frac{dx}{1+25x^2},$$

$$\int \frac{dx}{4+x^2}, \quad \int \frac{dx}{4+9x^2}, \quad \int \frac{dx}{2+3x^2},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+5}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-2}},$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2}, \quad \int \frac{dx}{4-x^2}, \quad \int \frac{dx}{4-25x^2}, \quad \int \frac{dx}{2-5x^2}.$$



### Заняття 3. Підведення функції під знак диференціала

Підвести під знак диференціала можна не тільки сталі, а і функції.

Розглянемо інтеграл

$$\int f(x) dx.$$

Нехай підінтегральну функцію  $f(x)$  можна уявити як добуток двох функцій, один з яких є похідна певної функції  $u(x)$ :

$$f(x) = g(x)u'(x).$$

Тому що за ознакою, диференціал функції  $u(x)$  дорівнює

$$du = u'(x)dx,$$

маємо

$$\int f(x) dx = \int g(u(x))u'(x) dx = \int g(u) du.$$

Тобто, якщо підінтегральну функцію можна розкласти на два множники, один з яких є похідна певної функції  $u(x)$ , то цю функцію можна підвести під знак диференціала в надії, що одержаний інтеграл буде табличним.

*Приклад 0.6.*

$$\int xe^{x^2} dx = \left\| \begin{array}{l} d(x^2) = (x^2)' dx = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2}d(x^2) \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

В цьому прикладі підінтегральна функція — добуток функції  $x$  на функцію  $e^{x^2}$ . Функція  $x$  є похідною функції  $x^2$ , тому функція  $x$  була підведена під знак диференціала.

Звернемо увагу на те, що можна інтегрувати вважаючи функцію  $x^2$  змінною інтегрування, а можна позначити цю функцію як певну допоміжну функцію  $u = x^2$ :

$$\int xe^{x^2} dx = \left\| \begin{array}{l} u = x^2, \\ du = u' dx = (x^2)' dx = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2}du \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

*Приклад 0.7.*

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 3}} = \left\| x dx = \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{1}{2} d(x^2 - 3) \right\| = \int \frac{d(x^2 - 3)}{2\sqrt{x^2 - 3}} = \sqrt{x^2 - 3} + C.$$

Або

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 3}} = \left\| \begin{array}{l} u = x^2 - 3, \\ du = u' dx = (x^2 - 3)' dx = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} du \end{array} \right\| =$$
$$= \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2 - 3} + C.$$

Приклад 0.8.

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \|d(\sin x) = \cos x dx\| =$$
$$= \int \sin^3 x d(\sin x) = \frac{\sin^{3+1} x}{3+1} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C;$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \sin x, \\ du = (\sin x)' dx \end{array} \right\| = \int u^3 du = \frac{u^{3+1}}{3+1} + C = \frac{\sin^4}{4} + C.$$

**Завдання.** Користуючись диференціалами

$$x dx = \frac{1}{2} d(x^2), \quad x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3),$$

знайти невизначені інтеграли:

$$\int x dx, \quad \int d(x^2), \quad \int \sin(x^2) d(x^2), \quad \int x \sin x^2 dx,$$

$$\int x \sin(2x^2 - 3) dx, \quad \int x^2 \sin(2x^3 - 3) dx, \quad \int x \sin(4 - 3x^2) dx,$$

$$\int \cos(x^2) d(x^2), \quad \int x \cos(x^2) dx, \quad \int x \cos(3x^2 - 1) dx,$$

$$\int e^{x^2} d(x^2), \quad \int x e^{x^2} dx, \quad \int e^{x^2+3} d(x^2 + 3),$$

$$\int x e^{x^2+3} dx, \quad \int x e^{1-2x^2} dx,$$

$$\begin{array}{lll}
\int \sqrt{1-x} dx, & \int \sqrt{1-x^2} d(x^2), & \int 2x\sqrt{1-x^2} dx, \\
\int x\sqrt{3+x^2} dx, & \int x\sqrt{4-9x^2} dx, & \\
\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}}, & \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}, & \int \frac{xdx}{\sqrt{2-3x^2}}, \\
\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2-2}}, & \int \frac{xdx}{1+x^2}, & \int \frac{xdx}{1+x^4}, \\
\int x^2\sqrt{1+x^3} dx, & \int x^2\sqrt[6]{1-7x^3} dx, & \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+1}}, \\
\int \frac{x^2 dx}{1-x^3}, & \int \frac{x+1}{\sqrt{1-4x^2}} dx. & 
\end{array}$$

Врахувати диференціали

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d(\sqrt{x}), \quad \frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad \cos x dx = d(\sin x), \quad \sin x dx = -d(\cos x),$$

і знайти невизначені інтеграли:

$$\begin{array}{lll}
\int d(\sqrt{x}), & \int \frac{dx}{\sqrt{x}}, & \int \cos(\sqrt{x}) d(\sqrt{x}), \\
\int \cos(\sqrt{x}) \frac{dx}{\sqrt{x}}, & \int e^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}, & 
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\int \frac{dx}{x}, & \int d(\ln x), & \int \cos(\ln x) d(\ln x), & \int \cos(\ln x) \frac{dx}{x}, \\
\int \sqrt{\ln x} \frac{dx}{x}, & \int \frac{dx}{x \ln x}, & \int \sin^3(\ln x) \frac{dx}{x}, & 
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\int \cos x dx, & \int d(\sin x), & \int \sin^2 x d(\sin x), \\
\int \sin^2 x \cos x dx, & \int e^{\sin x} \cos x dx, & 
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
\int \sin x dx, & \int d(\cos x), & \int \cos^3 x d(\cos x), \\
\int \cos^3 x \sin x dx, & \int \sqrt[3]{1+4\cos x} \sin x dx. & 
\end{array}$$

Врахувати диференціали

$$e^x dx = d(e^x), \quad \frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x),$$

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x), \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x),$$

і знайти невизначені інтеграли.

$$\int e^x dx, \quad \int d(e^x), \quad \int \frac{e^x dx}{e^x - 1}, \quad \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}},$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x} - 1}, \quad \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1},$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int d(\operatorname{arctg} x), \quad \int (\operatorname{arctg} x)^2 d(\operatorname{arctg} x),$$

$$\int (\operatorname{arctg} x)^2 \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int e^{\operatorname{arctg} x} \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int d(\arcsin x),$$

$$\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}, \quad \int e^{\arcsin x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad \int d(\operatorname{tg} x), \quad \int \sqrt[3]{1+\operatorname{tg} x} \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

## Заняття 4. Заміна змінної інтегрування

Нагадаємо, що змінна інтегрування може бути функція. Тому можна зробити заміну змінної інтегрування. Нехай  $x$  є певна дифереційовна монотонна функція  $x = u(t)$ , тоді

$$\int f(x) dx = \int f(u(t))u'(t) dt,$$

і можливо, що одержаний інтеграл буде табличним.

*Приклад 0.9.* Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

Цей інтеграл не є табличним, він містить радикал. Позначимо цей радикал як нова допоміжна функція

$$t = \sqrt{x - 1}.$$

Звідси знайдемо вихідну змінну інтегрування  $x$  і її диференціал

$$\begin{aligned} t^2 &= x - 1, \\ x &= t^2 + 1, \\ dx &= (t^2 + 1)' dt = 2t dt. \end{aligned}$$

Таким чином, підставляючи замість змінної  $x$  та її диференціала одержані вирази, маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} &= \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{x-1}, \\ t^2 = x-1, \\ x = t^2 + 1, \\ dx = (t^2 + 1)' dt = 2t dt \end{array} \right\| = \int \frac{2t dt}{(t^2 + 1)t} = 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ &= 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

**Завдання.** Знайти невизначені інтеграли, користуючись вказаними підстановками

$$\begin{array}{ll} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} & (t = \sqrt{x}), & \int x\sqrt{x-5} dx & (t = \sqrt{x-5}), \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{\sqrt{x}}} & (t = \sqrt[6]{x}), & \int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx & (t = \sqrt{x+1}), \\ \int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx & (t = e^x), & \int \frac{dx}{1 + 2e^x} & (t = e^{-x}), \end{array}$$

## Заняття 5. Інтегрування частинами

Нехай функції  $u(x)$  і  $v(x)$  є неперервно дифереційовні, тоді справедлива формула інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Таким чином, якщо треба знайти певний інтеграл

$$\int f(x) dx,$$

то за формулою інтегрування частинами, підінтегральний вираз  $f(x) dx$  розкладається на дві частини  $u$  і  $dv$ :

$$f(x) dx = u dv.$$

Дале, обчислюючи диференціал  $du = u' dx$  і інтеграл  $v = \int dv$ , одержимо інший інтеграл

$$\int v du,$$

якої може бути більш простим.

Загальних правил вибору функцій  $u$  і  $v$  немає, однак приблизно можна виділити три різні класи.

1. Під інтегралом міститься трансцендентна функція, похідна якої є функція раціональна. Це такі функції:

$$\ln x, \quad \arcsin x, \quad \arccos x, \quad \operatorname{arctg} x, \quad \operatorname{arcctg} x, \quad \text{та інші.}$$

Позначимо цю функцію за  $u$ , решту підінтегрального вираза приймають за  $dv$ . Тоді, після диференціювання позбавимось трансцендентної функції.

*Приклад 0.10.*

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \left\| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = (\ln x)' dx = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, \quad v = \int dv = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C. \end{aligned}$$

*Зауваження 0.3.* Сталої інтегрування при знаходженні функції  $v$  не пишемо, її запишемо при знаходженні останнього інтеграла  $\int v du$ .

*Приклад 0.11.*

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= \left\| \begin{array}{l} u = \arcsin x, \quad du = (\arcsin x)' dx = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx, \quad v = \int dv = \int dx = x \end{array} \right\| = \\ &= x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x - \int \frac{d(x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = \\ &= x \arcsin x + \int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

2. Під інтегралом міститься добуток многочлена  $P_n(x)$  на функцію  $\sin x$ ,  $\cos x$  або  $e^{ax}$ . Тоді за функцію  $u$  приймають многочлен.

*Приклад 0.12.*

$$\begin{aligned} \int (3x - 5) \sin x \, dx &= \left\| \begin{array}{l} u = 3x - 5, \quad du = (3 - 5)' dx = 3 \, dx \\ dv = \sin x \, dx, \quad v = \int dv = \int \sin x \, dx = -\cos x \end{array} \right\| = \\ &= -(3x - 5) \cos x + 3 \int \cos x \, dx = -(3x - 5) \cos x + 3 \sin x + C. \end{aligned}$$

**Завдання.** Знайти невизначені інтеграли, користуючись методом інтегрування частинами:

$$\begin{array}{cccc} \int \operatorname{arctg} x \, dx, & \int (x^2 - x + 1) \ln x \, dx, & \int \ln(x^2 + 1) \, dx, & \int x \operatorname{arctg} x \, dx, \\ \int x e^x \, dx, & \int (2x - 1) \cos x \, dx, & \int x \sin(2x) \, dx, & \int x^2 e^x \, dx, \\ \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx, & \int \frac{dx}{x \ln x}, & \int (\ln x)^2 \, dx, & \int e^{-2x} \cos 3x \, dx. \end{array}$$

## Заняття 6. Інтегрування простих раціональних функцій

Функція виду

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

де  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — числа, називається цілою раціональною або многочленом. Інтеграл від многочлена зводиться до інтегралів від степеневих функцій:

$$\begin{aligned} \int P_n(x) \, dx &= \int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) \, dx = \\ &= a_n \int x^n \, dx + a_{n-1} \int x^{n-1} \, dx + \dots + a_1 \int x \, dx + a_0 \int dx = \\ &= a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + a_{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots + a_1 \frac{x^2}{2} + a_0 x + C. \end{aligned}$$

Частка многочленів називається дробово-раціональною функцією.

Алгебраїчний дріб називається правильним, якщо степінь чисельника менший за степінь знаменника. У протилежному разі, алгебраїчний дріб називається неправильним.

При інтегруванні дробово-раціональної функції, якщо дріб неправильний, потрібно вилучити цілу частину.

Приклад 0.13.

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x+1} dx &= \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left( \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \int \left( 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

Тут степінь чисельника дорівнює степені знаменника, тому дріб неправильний і було вилучено цілу частину.

Вилучити цілу частину можна і шляхом ділення чисельника на знаменник.

**Завдання.** Знайти невизначені інтеграли від алгебраїчних дробів, вилучаючи цілу частину.

$$\int \frac{x^2}{1-x} dx, \quad \int \frac{x^4}{x^2+1} dx, \quad \int \frac{x^2}{3+x^2} dx, \quad \int \frac{x^2-2x+3}{x^2-4} dx, \quad \int \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx.$$

### Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен

При інтегруванні інтегралів типу

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

корисно вилучити повний квадрат. Якщо скористатися формулою

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

то одержимо

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = \\ &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{2a} + c.\end{aligned}$$

Позначивши

$$u = x + \frac{b}{2a}, \quad \pm q^2 = -\frac{b^2}{2a} + c,$$

вихідні інтеграли зводяться до табличних

$$\int \frac{du}{u^2 \pm q^2}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm q^2}}, \quad \int \frac{du}{\sqrt{q^2 \pm u^2}}.$$



Приклад 0.14. Знайти невизначений інтеграл

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5}.$$

Вилучимо повний квадрат

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x + 5 &= 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 5 = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right) + 5 = \\ &= 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 5 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}. \end{aligned}$$

Тоді маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3x^2 - 2x + 5} &= \left\| \begin{array}{l} u = x - \frac{1}{3}, \\ du = dx \end{array} \right\| = \int \frac{du}{3u^2 + \frac{14}{3}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^2 + \frac{14}{3^2}} = \\ &= \frac{1}{3} \frac{3}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{3u}{\sqrt{14}} + C = \frac{1}{\sqrt{14}} \operatorname{arctg} \frac{3x - 1}{\sqrt{14}} + C. \end{aligned}$$

**Завдання.** Знайти невизначені інтеграли

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{1 + x + x^2}, \quad \int \frac{dx}{x^2 - 10x + 16}, \quad \int \frac{dx}{x^2 + 8x - 9}, \\ &\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}, \quad \int \frac{dx}{x^2 + 8x + 15}, \\ &\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x - x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}. \end{aligned}$$