$\Rightarrow$ Несобственные интегралы I рода называются *сходящимися*, если существуют конечные пределы, стоящие в правых частях равенств (2.1). Если же указанные пределы не существуют или бесконечны, то несобственные интегралы называются *расходящимися*.

Вот некоторые *признаки сходимости и расходимости* несобственных интегралов I рода:

1. Если на промежутке $[a; +\infty)$ непрерывные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условию $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ («признак сравнения»).

2. Если при $x \in [a; +\infty)$, $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$ и существует конечный предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = k \neq 0$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно, («предельный признак сравнения»).

3. Если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, который в этом случае называется *абсолютно сходящимся*.

9.2.1. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость.

○ По определению несобственного интеграла I рода (2.1) имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b}\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{1}\right) = 1,$$

интеграл сходится и его величина равна 1.

Замечание. Можно показать, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$, сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$. ●

Найти значение несобственных интегралов или установить их расходимость:

9.2.2. $\int_0^{+\infty} e^{-4x}\, dx.$

9.2.3. $\int_0^{+\infty} x\, e^{-x^2}\, dx.$

9.2.4. $\int_{13}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}.$

9.2.5. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$

9.2.6. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{0} x \cos x\, dx$.

○ По определению несобственного интеграла I рода

$$\int_{-\infty}^{0} x \cos x\, dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^0 x \cos x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = \cos x\, dx & v = \sin x \end{array}\right] = \lim_{a\to-\infty} \left(x \sin x\Big|_a^0 + \cos x\Big|_a^0\right) =$$

$$= 0 - \lim_{a\to-\infty} a \sin a + 1 - \lim_{a\to-\infty} \cos a,$$

интеграл расходится, т. к. $\lim\limits_{a\to-\infty} a \sin a$, $\lim\limits_{a\to-\infty} \cos a$ не существуют (задача 6.4.125). ●

9.2.7. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{0} \cos 3x\, dx$.

9.2.8. Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

○ Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ определена и непрерывна на всей числовой оси. Кроме того, она является четной. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Исходя из определения несобственного интеграла (2.1), имеем

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to+\infty} \int_{0}^{a} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \lim_{a\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^a = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

интеграл сходится. Следовательно, исходный интеграл также сходится и равен π. ●

9.2.9. Найти значение или установить расходимость несобственного интеграла $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x}$.

9.2.10. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.

○ Здесь $f(x) = \frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}} > 0$ при $x \in [1; +\infty)$, при этом $\frac{x+2}{x^{\frac{2}{3}}} >$ $> \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \varphi(x)$. Но интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ расходится так как

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \lim_{b\to\infty} 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_1^b = 3\lim_{b\to\infty} b^{\frac{1}{3}} - 3 = \infty.$$

Поэтому, согласно признаку сравнения, интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ расходится. ●

9.2.11. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$.

9.2.12. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$.

○ Здесь $f(x)=\frac{1}{2+x+3x^5}>0$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{1}{x^5}$, интеграл от которой $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$ сходится (см. пример 9.2.1). А так как существует предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5}{2+x+3x^5}=\dfrac{1}{3}\neq 0$, то исходный интеграл $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{2+x+3x^5}$ также сходится («предельный признак сравнения»). ●

9.2.13. Исследовать сходимость интеграла $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$.

Дополнительные задачи

Вычислить следующие несобственные интегралы или установить их расходимость:

9.2.14. $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

9.2.15. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

9.2.16. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}2x\sin x\,dx$.

9.2.17. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0}x\,e^x\,dx$.

9.2.18. $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+12}$.

9.2.19. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}2\,e^{-\sqrt{x}}\,dx$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Исследовать на сходимость интегралы:

9.2.20. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^6+2}}$.

9.2.21. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\,dx$.

9.2.22. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}e^{-4x}\cos 2x\,dx$.

9.2.23. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\ln\frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx$.

9.2.24. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2+8}}$.

9.2.25. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{2+3\cos x}{x^4}\,dx$.

9.2.26. $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty}\frac{x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{2+x^3}}\,dx$.

9.2.27. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x+\cos^2 x}$.

9.2.28. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{3x+\sqrt{9+x^2}}{\sqrt[3]{x^2+2x+x^3}}\,dx$.

9.2.29. $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

9.2.46. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ или установить его расходимость.

Подынтегральная функция терпит разрыв при $x = 3$ $\left(\lim\limits_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} = +\infty\right)$. Согласно формуле (2.2) имеем

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin \frac{x}{3}\Big|_0^{3-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \arcsin \frac{3-\varepsilon}{3} - 0 = \frac{\pi}{2},$$

интеграл сходится и его величина составляет $\frac{\pi}{2}$.

9.2.47. Вычислить значение интеграла $\int\limits_0^1 \ln x\, dx$.

При $x \to 0$ функция $\ln x \to -\infty$. По формуле (2.3) имеем

$$\int\limits_0^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{0+\varepsilon}^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0} (x\ln x - x)\Big|_\varepsilon^1 =$$

$$= -1 - \lim_{\varepsilon\to 0}(\varepsilon \ln\varepsilon - \varepsilon) = -1 - 0 = -1,$$

т. к.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon\ln\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon) = 0.$$

Интеграл сходится и равен -1.

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

9.2.48. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 2x}$.

9.2.49. $\int\limits_0^1 x\ln x\, dx$.

9.2.50. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{x\ln x}$.

9.2.51. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Внутри отрезка интегрирования $[-1; 1]$ функция $\frac{1}{x^2}$, при $x \to 0$, неограниченно возрастает. Согласно формуле (2.4) имеем

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\delta\to 0}\int_{0+\delta}^{1}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\varepsilon}+\lim_{\delta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\delta}^{1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}-1+\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}-1=\infty,$$

интеграл расходится. ●

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

9.2.52. $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

9.2.53. $\displaystyle\int_{2}^{5}\frac{dx}{(x-4)^2}$.

9.2.54. $\displaystyle\int_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}$.

9.2.55. Исследовать на сходимость интеграл $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}\,dx$.

○ Функция $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1-x^2)^2}}$ терпит бесконечный разрыв в точке $x=1$. Перепишем ее в виде $f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\cdot\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$ и сравним ее с функцией $\varphi(x)=\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$. Как известно (см. (2.5)), интеграл $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\,dx$ сходится $\left(\alpha=\frac{2}{3}<1\right)$. Так как

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{2}{3}}}\cdot\frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{1}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{(1+x)^2}}=\frac{\cos^2 1}{\sqrt[3]{4}}\quad(\neq 0,\neq\infty),$$

то, согласно предельному признаку сравнения, исходный интеграл также сходится. ●

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

9.2.56. $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

9.2.57. $\displaystyle\int_{0}^{4}\frac{\cos x}{\sqrt{4-x}}\,dx$.

9.2.58. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$.

○ Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ разрывна в точке $x = 0$. Сравним ее с функцией $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Так как $\frac{1}{3x^2+\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Но несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ сходится (см. (2.5)). Следовательно, интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$ по признаку сравнения также сходится. ●

Исследовать сходимость несобственных интегралов:

9.2.59. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

9.2.60. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

Дополнительные задачи

Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

9.2.61. $\int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos x}$.

9.2.62. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\, dx$.

9.2.63. $\int\limits_{-1}^{2,5} \frac{dx}{x^2-5x+6}$.

9.2.64. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$.

9.2.65. $\int\limits_{-\frac{1}{\ln 2}}^{0} \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^3}$.

9.2.66. $\int\limits_{0}^{\frac{1}{\ln 2}} \frac{e^{\frac{1}{x}}\,dx}{x^3}$.

9.2.67. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$.

9.2.68. $\int\limits_1^2 \frac{2\,dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}$.

Контрольные вопросы и более сложные задачи

Исследовать несобственные интегралы на сходимость:

9.2.69. $\int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$.

9.2.70. $\int\limits_0^1 \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$.