Інтегрування найпростіших ірраціональностей

При інтегруванні виразів, що містять дробові степені змінної інтегрування (тобто ірраціональності), методом підстановки зводять підінтегральну функцію до раціонального дробу. Розглянемо декілька випадків.

Інтегрування виразів, що містять квадратний тричлен у знаменнику

Ці інтеграли виду $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, $I_2 = \int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Вони приводяться до табличних шляхом виділення повного квадрата в квадратному тричлені:

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[x^2+2x\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right].$$

Приклад Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+1+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$

$$= \begin{vmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C = ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right| + C.$$

Приклад Знайти $\int \frac{x-1}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{x-1}{\sqrt{6x-x^2-8}}dx = \begin{vmatrix} -x^2+6x-8 = -\left(x^2-6x+9-9\right)-8 = \\ = -\left((x-3)^2-9\right)-8 = -(x-3)^2+9- \\ -8 = -(x-3)^2+1 \end{vmatrix} =$

$$= \int \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-3)^2}}dx = \left| \begin{matrix} x-3=t \\ dx=dt \\ x=t+3 \end{matrix} \right| = \int \frac{t+3-1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{t+2}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} + 2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{-2tdt}{\sqrt{1-t^2}} + 2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-t^2} + 2\,arcsin\,t + C = -\sqrt{1-(x-3)^2} +$$

$$+ 2\,arcsin(x-3) + C = -\sqrt{6x-x^2-8} + 2\,arcsin(x-3) + C.$$

Інтеграли виду $\int R\left(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[l]{x}, ..., \sqrt[m]{x}\right)dx$

Такі інтеграли зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою підстановки $x = t^s$, де $S = HCK(k,l,...,m)$ – найменше спільне кратне чисел $k,l,...,m$.

Приклад Знайти $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[4]{x^5}}$.

Розв'язання. Маємо $\int \frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{5}{4}}}$. Спільний знаменник дробових показників степенів $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ змінної x $S = HCK(2;3;4) = 12$. Тому зробимо підстановку $x = t^{12}$:

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[4]{x^5}} = \left| \begin{matrix} x = t^{12} \\ dx = 12t^{11}dt \\ t = \sqrt[12]{x} \end{matrix} \right| = \int \frac{\sqrt{t^{12}}\cdot 12t^{11}dt}{\sqrt[3]{\left(t^{12}\right)^4} - \sqrt[4]{\left(t^{12}\right)^5}} = 12\int \frac{t^6 \cdot t^{11}dt}{t^{16} - t^{15}} =$$

$$= 12\int \frac{t^{17}dt}{t^{15}(t-1)} = 12\int \frac{t^2}{t-1}dt = 12\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt = 12\left(\int \frac{(t-1)(t+1)}{t-1}dt + \int \frac{dt}{t-1}\right) =$$

$$= 12\left(\int (t+1)dt + \int \frac{dt}{t-1}\right) = 12\left(\frac{t^2}{2} + t + ln|t-1|\right) + C = 12\left(\frac{\sqrt[12]{x^2}}{2} + \sqrt[12]{x} + ln\left|\sqrt[12]{x} - 1\right|\right) +$$

$$+ C = 12\left(\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + \sqrt[12]{x} + ln\left|\sqrt[12]{x} - 1\right|\right) + C.$$

Інтеграли виду $\int R\left(\sqrt[k]{ax+b},\sqrt[l]{ax+b},...,\sqrt[m]{ax+b}\right)dx$

Підінтегральний вираз містить дробові степені лінійного двочлена $(ax+b)$. У цьому випадку доцільно зробити підстановку $ax+b=t^s$, де $s=HCK(k,l,m)$.

Приклад Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=\left|\begin{array}{l} s=HCK(2;3)=6\Rightarrow x+1=t^6 \\ dx=6t^5dt;\quad t=\sqrt[6]{x+1}\end{array}\right|=$

$$=\int\frac{6t^5dt}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}}=6\int\frac{t^5dt}{t^3+t^2}=6\int\frac{t^3dt}{t+1}=6\int\frac{(t^3+1)-1}{t+1}=6\left(\int\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt-\int\frac{dt}{t+1}\right)=$$

$$=6\left(\int(t^2-t+1)dt-\int\frac{dt}{t+1}\right)=6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-ln|t+1|\right)+C=6\left(\frac{\sqrt[6]{(x+1)^3}}{3}-\frac{\sqrt[6]{(x+1)^2}}{2}+\right.$$

$$\left.+\sqrt[6]{x+1}-ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right|\right)+C.$$

Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}},\sqrt[b]{\frac{ax+b}{cx+d}},...,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$

Такі інтеграли раціоналізуються підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^s$, де $s=HCK$ $(k,l,...,m)$.

Приклад Знайти $\int\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\frac{dx}{2x+1}$.

Розв'язання. $\int\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}\frac{dx}{2x+1}=\left|\begin{array}{l}\frac{2x-1}{2x+1}=t^2\Rightarrow x=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{1-t^2} \\ dx=\frac{2tdt}{(1-t^2)^2};\,2x+1=\frac{2}{1-t^2}\end{array}\right|=$

$$=\int \frac{t\cdot 2tdt}{\frac{2}{1-t^2}\cdot\left(1-t^2\right)^2}=\int\frac{t^2dt}{1-t^2}=-\int\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=-\int\left(\frac{t^2-1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=-\int dt-$$

$$-\int\frac{dt}{t^2-1}=-t-\frac{1}{2}ln\frac{t-1}{t+1}+C=-\sqrt{\frac{2x-1}{2x+1}}-\frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}}\right|+C.$$

Тригонометричні підстановки

Метою тригонометричних підстановок є звільнення від квадратного кореня у підінтегральному виразі. Розглянемо наступні інтеграли, де $\boldsymbol{R}$ є раціональною функцією.

1. $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx$, $a=const$. Тут скористаємося підстановкою $x=a\sin t$ $\left(x=a\cos t\right)$, де $dx=a\cos t dt$, $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}=a\sqrt{1-\sin^2 t}=a\sqrt{\cos^2 t}=a\cos t$

2. $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx$ – підстановка $x=a\,tg\,t\left(x=a\,ctg\,t\right)$, $dx=\frac{a\,dt}{\cos^2 t}$, $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2tg^2t}=a\sqrt{1+tg^2t}=a\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}=\frac{a}{\cos t}$.

3. $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ – підстановка $x=\frac{a}{\sin t}\left(x=\frac{a}{\cos t}\right)$, $dx=-a\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt$; $\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2}=a\sqrt{\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}}=a\sqrt{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}}=a\frac{\cos t}{\sin t}=a\,ctg\,t$.

Зауваження Інтеграли виду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ можна звести, виділивши під знаком радікала повний квадрат, до одного із трьох зазначених вище інтегралів.

Приклад Знайти $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}} = \left| \begin{matrix} x=\sqrt{9}\cdot tgt; & t = arctg\,\frac{x}{3} \\ dx = \frac{3}{cos^2 t}dt & \end{matrix} \right| =$

$$= \int \frac{3dt}{9tg^2 t\cdot cos^2 t\cdot\sqrt{9+9tg^2 t}} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\frac{sin^2 t}{cos^2 t}\cdot cos^2 t\cdot\sqrt{9\left(1+tg^2 t\right)}} = \frac{1}{30}\int \frac{dt}{sin^2 t\cdot\frac{3}{cos\,t}} =$$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{cos\,tdt}{sin^2 t} = \frac{1}{9}\int \frac{d(sin\,t)}{sin^2 t} = \frac{1}{9}\cdot\frac{(sin\,t)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{9\,sin\,t} + C = -\frac{1}{9\,sin\left(arctg\,\frac{x}{3}\right)} + C$$

Приклад Знайти $\int\sqrt{3+2x-x^2}\,dx$.

Розв'язання. $\int\sqrt{-\left(x^2-2x\right)+3dx} = \int\sqrt{-\left(x^2-2x+1-1\right)+3dx} =$

$$= \int\sqrt{-(x-1)^2+1+3dx} = \int\sqrt{4-(x-1)^2\,dx} = \left| \begin{matrix} x-1 = 2\,sin\,t;\ t = arcsin\,\frac{x-1}{2} \\ dx = 2\,cos\,tdt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\sqrt{4-4\,sin^2 t}\cdot 2\,cos\,tdt = 2\cdot 2\int\sqrt{1-sin^2 t}\cdot cos\,tdt = 4\int cos\,t\cdot cos\,tdt = 4\int cos^2 tdt =$$

$$= 4\int\frac{1+cos\,2t}{2}\,dt = 2\left(\int dt + \int cos\,2tdt\right) = 2\left(t+\frac{1}{2}sin\,2t\right)+C = 2\left(arcsin\,\frac{x-1}{2} +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}sin\left(2\,arcsin\,\frac{x-1}{2}\right)\right) + C.$$

Зауваження Зауважимо, що різні способи інтегрування можуть привести до різних аналітичних виразів первісної. Проте ми отримаємо вирази, які відрізняються хіба, що на сталу.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРАЦІОНАЛЬНОСТЕЙ

Приклад Обчислити інтеграл: $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right| = \int\frac{6t^5 dt}{t^3+3t^2} = \int\frac{6t^5 dt}{t^2(t+3)} = 6\int\frac{t^3 dt}{t+3} =$

$$= 6\int\frac{t^3+27-27}{t+3}\,dt = 6\int\frac{(t+3)\left(t^2-3t+9\right)-27}{t+3}\,dt = 6\int\left(t^2-3t+9-\frac{27}{t+3}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+9t-27\,ln|t+3|\right)+C = 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3}-\frac{3\sqrt[3]{x}}{2}+\sqrt[6]{x}-27\,ln\left|\sqrt[6]{x}+3\right|\right)+C.$$

Приклад Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{2x+1}} = \left| \begin{array}{ll} 2x+1=t^2 & \\ 2x=t^2-1 & dx=tdt \\ x=\frac{1}{2}\left(t^2-1\right) & \end{array} \right| = \int \frac{tdt}{\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)+t} =$

$$= 2\int \frac{tdt}{t^2-1+2t} = 2\int \frac{tdt}{(t+1)^2-2} = 2\int \frac{(t+1)-1}{(t+1)^2-2}dt = 2\int \frac{(t+1)dt}{(t+1)^2-2} - 2\int \frac{dt}{(t+1)^2-2} =$$

$$= ln\left|(t+1)^2-2\right| - ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C = ln\left|2x+\sqrt{2x+1}\right| - ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}+1-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+1}+1+\sqrt{2}}\right| + C$$

Приклад Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}} = \left\{ \sqrt[4]{1-2x}=t; dt = \frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-dx}{2t^3} \right\} =$

$$= \int \frac{-2t^3dt}{t^2-t} = -2\int \frac{t^2dt}{t-1} = -2\int \left(t+\frac{t}{t-1}\right)dt = -2\int tdt - 2\int \frac{t}{t-1}dt =$$

$$= -t^2 - 2\int \left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt = -t^2 - 2t - 2\,ln|t-1| + C = -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} -$$

$$- 2\,ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right| + C.$$

Приклад Обчислити інтеграл: $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx$.

Розв'язання. $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1}=t; \quad x-1=t^{12}; \\ dx=12t^{11}dt; \end{array} \right\} =$

$$= \int \frac{\left(t^4+t^3\right)12t^{11}dt}{t^{12}\left(1+t^2\right)} = 12\int \frac{t^3+t^2}{t^2+1}dt == 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt + \int \frac{t^2}{t^2+1}dt\right) =$$

$$= 12\left(\int \left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt + \int \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt\right) = 12\int tdt - 12\int \frac{tdt}{t^2+1} + 12\int dt -$$

$$- 12\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2 + 12t - 6\,ln\left(t^2+1\right) - 12arctgt + C = 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} -$$

$$- 6\,ln\left(\sqrt[6]{x-1}+1\right) - 12arctg\sqrt[12]{x-1} + C.$$

Приклад Обчислити інтеграл: $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3}$.

Розв'язання. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\frac{dx}{(x-1)^3} = \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^3,\ x+1 = t^3 x - t^3,\ dx = \frac{-6t^2\,dt}{\left(t^3-1\right)^2} \\ x+1 = t^3(x-1),\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \end{array} \right| =$

$$= \int t\frac{-6t^2}{\left(t^3-1\right)\left(\frac{t^3+1}{t^3-1}-1\right)^3} = -6\int \frac{t^3\,dt}{\left(t^3-1\right)^2\frac{\left(t^3+1-t^3+1\right)^3}{\left(t^3-1\right)^3}} = -\frac{3}{4}\int t^3\left(t^3-1\right)dt =$$

$$= -\frac{3}{4}\int\left(t^6-t^3\right)dt = -\frac{3}{4}\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{7}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^7}-\frac{1}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^4}\right)+C.$$

Приклад Обчислити інтеграл: $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}$.

Розв'язання. $\int \frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}{x^6}dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{\left(4-4\sin^2 t\right)^3}\,2\cos t\,dt}{64\sin^6 t} =$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt = \left| \begin{array}{ll} tg\,t = z & \cos^2 t = \frac{1}{1+z^2} \\ t = arctg\,z & \\ dt = \frac{dz}{1+z^2} & \sin^2 t = \frac{z^2}{1+z^2} \end{array} \right| = \frac{1}{4}\int \frac{\left(1+z^2\right)^3}{\left(1+z^2\right)^2 z^6}\frac{dz}{\left(1+z^2\right)} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^6} = \frac{1}{4}\int z^{-6}dz = \frac{1}{4}\frac{z^{-5}}{-5}+C = -\frac{1}{20z^5}+C = \left| tg\,t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \right| =$$

$$= -\frac{\sqrt{\left(4-x^2\right)^5}}{20x^5}+C.$$

Приклад Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = tg\,t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\left(1-tg^2 t\right)\sqrt{1+tg^2 t}} =$

$$= \int \frac{dt}{\cos^2 t\left(\frac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)\frac{1}{\cos t}} = \int \frac{\cos t\,dt}{1-2\sin^2 t} = \left| \begin{array}{l} \sin t = z \\ dz = \cos t\,dt \end{array} \right| = \int \frac{dz}{1-2z^2} =$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,ln\left|\frac{1+\sqrt{2}z}{1-\sqrt{2}z}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,ln\left|\frac{1+\sqrt{2}\,\dfrac{tg\,t}{\sqrt{1+tg^2t}}}{1-\sqrt{2}\,\dfrac{tg\,t}{\sqrt{1+tg^2t}}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{2}x}\right|+C$$

Приклад Обчислити інтеграл: $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

Розв'язання. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\left|\begin{array}{l}x=3/cos\,t\\ dx=\dfrac{3\,sin\,tdt}{cos^2\,t}\end{array}\right|=\int\frac{3\,sin\,tdt}{cos^2\,t\,\dfrac{9}{cos^2\,t}\sqrt{\dfrac{9}{cos^2\,t}-9}}=$

$$=\frac{1}{9}\int cos\,t\,dt=\frac{1}{9}\,sin\,t=\left|sin\,t=\sqrt{1-cos^2\,t}=\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\right|=\frac{1}{9}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}+C$$

Приклад Обчислити інтеграл: $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{4+x^2}}$.

Розв'язання. $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{4+x^2}}=\left\{\begin{array}{l}x=2tgt\,;\,dx=\dfrac{2}{cos^2\,t}\,dt\,;\\ \sqrt{4+x^2}=\dfrac{2}{cos\,t}\,;\end{array}\right\}=\int\frac{2\,cos\,tdt}{cos^2\,t\,16\,tg^4t\,2}=$

$$=\int\frac{cos^3\,tdt}{16\,sin^4\,t}=\frac{1}{16}\int\frac{\left(1-sin^2\,t\right)d\,sin\,t}{sin^4\,t}=-\frac{1}{48\,sin^3\,t}+\frac{1}{16\,sin\,t}+C=$$

$$=\left\{sin\,t=\sqrt{1-\frac{4}{4+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\right\}=-\frac{\left(4+x^2\right)^{3/2}}{48x^3}+\frac{4\sqrt{a^2+x^2}}{16x}+C\,.$$

Приклад Обчислити інтеграл: $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання. $\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{cos\,t}\,;\,dx=\dfrac{tgt}{cos\,t}\,dt\,;\\ \sqrt{x^2-1}=tgt\,;\end{array}\right\}=\int\frac{\dfrac{sin\,t}{cos^2\,t}}{\dfrac{1}{cos^3\,t}\cdot tgt}\,dt=$

$$=\int\frac{sin\,t\,cos^4\,t}{cos^2\,t\,sin\,t}\,dt=\int cos^2\,tdt=\int\frac{1}{2}\left(1+cos\,2t\right)dt=\frac{1}{2}\,t+\frac{1}{4}\,sin\,2t+C=$$

$$=\left\{sin\,2t=2\,sin\,t\,cos\,t=2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\}=\frac{1}{2}\left(arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)+C\,.$$