

Знайти визначені інтегралі:

$$1.1. \int_1^2 \frac{(1 + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1.2. \int_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{1 + x^2}.$$

$$1.3. \int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25 + 3x}}.$$

$$1.4. \int_3^8 \sqrt{1 + x} dx.$$

$$1.5. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x}}.$$

$$1.6. \int_{-1}^0 \frac{dx}{4x^2 - 9}.$$

$$1.7. \int_0^3 \frac{dx}{(4x + 5)^2}.$$

$$1.8. \int_{-1}^1 \frac{dx}{9x^2 + 3}.$$

$$1.9. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 3}}.$$

$$1.10. \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{7 - 5x^2}}.$$

$$1.11. \int_1^3 \frac{dx}{5 - x}.$$

$$1.12. \int_0^2 \frac{dx}{4x^2 + 9}.$$

$$1.14. \int_0^1 \sqrt{1 + 3x} dx.$$

$$1.13. \int_1^3 \frac{dx}{5x^2 + 3}.$$

$$1.15. \int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}.$$

$$1.16. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{2 + x}}.$$

$$1.17. \int_0^2 \sqrt[4]{1 + 4x} dx.$$

$$1.18. \int_{-1}^0 \frac{dx}{1 - 4x}.$$

$$1.19. \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{3 - x^2}} dx.$$

$$1.20. \int_1^2 \frac{dx}{7x^2 - 4} dx.$$

$$1.21. \int_{-1}^1 \frac{dx}{2x^2 + 7}.$$

$$1.22. \int_0^2 (1 - 4x)^7 dx.$$

$$1.23. \int_0^3 \sqrt[3]{8 - 2x} dx.$$

$$1.24. \int_0^1 \frac{dx}{4 - 3x}.$$

$$1.25. \int_1^2 \frac{dx}{7 + 5x}.$$

$$1.26. \int_0^2 \frac{dx}{7x^2 + 3}.$$

$$1.27. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 3}}.$$

$$1.28. \int_{-1}^0 \sqrt{5 - 4x} dx.$$

$$2.1. \int_0^{\sqrt{3}} x^3 \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$2.2. \int_0^{12\sqrt{3}} \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^6+1}}.$$

$$2.3. \int_0^1 \frac{x dx}{x^2+1}.$$

$$2.4. \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx.$$

$$2.5. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^8+1}.$$

$$2.6. \int_0^{1/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2.7. \int_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$2.8. \int_1^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$2.9. \int_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx.$$

$$2.10. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^6}.$$

$$2.11. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{5-x^6}.$$

$$2.12. \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1-x \ln^2 x}}.$$

$$2.13. \int_0^4 x \sqrt{16-x^2} dx.$$

$$2.14. \int_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^4 dx}{(1+x^5)^3}.$$

$$2.15. \int_1^2 \frac{e^{1/x} dx}{x^2}.$$

$$2.16. \int_2^4 \frac{x^2 dx}{1-x^2}.$$

$$2.17. \int_0^2 x \sqrt{2x^2+1} dx.$$

$$2.18. \int_0^1 x \sqrt{2-x^2} dx.$$

$$2.19. \int_0^{\sqrt{\pi/4}} \frac{x dx}{\cos^2 x^2}.$$

$$2.20. \int_1^2 \frac{x dx}{4+x^4}.$$

$$2.21. \int_0^3 \frac{x dx}{(x^2+1) \sqrt{x^2+1}}.$$

$$2.22. \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3 dx}{(\frac{5}{8}-x^4)^{3/2}}.$$

$$2.23. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}.$$

$$2.24. \int_0^1 x^3 \sqrt{16-x^4} dx.$$

$$2.25. \int_2^e \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}.$$

$$2.26. \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx.$$

$$2.27. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{1+x^4}.$$

$$2.28. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4+1}.$$

$$\begin{array}{lll}
3.1. \int_5^{10} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}. & 3.2. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx. & 3.3. \int_2^{16} \frac{dx}{2-\sqrt{x}}. \\
3.4. \int_5^{10} \frac{x+1}{x\sqrt{x-1}} dx. & 3.5. \int_4^9 \frac{dx}{1-\sqrt{x}}. & 3.6. \int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx. \\
3.7. \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx. & 3.8. \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx. & 3.9. \int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{2+4x}}. \\
3.10. \int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}} dx. & 3.11. \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}. & 3.12. \int_4^9 \frac{x dx}{1+\sqrt{x}}. \\
3.13. \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{3+\sqrt[3]{x-2}} dx. & 3.14. \int_8^{15} \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}. & 3.15. \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}. \\
3.16. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}} dx. & 3.17. \int_1^e \frac{\ln x + \sqrt{x}}{x} dx. & 3.18. \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1} + (x+1)}. \\
3.19. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}. & 3.20. \int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}. & 3.21. \int_1^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^2}. \\
3.22. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx. & 3.23. \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x+5}}. & 3.24. \int_1^9 x\sqrt[3]{1-x} dx. \\
3.25. \int_4^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx. & 3.26. \int_2^5 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x-1}}. & 3.27. \int_3^8 \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}. \\
3.28. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{3-2x}}. & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
4.1. \int_0^1 \arcsin x \, dx. & 4.2. \int_0^{\ln 2} x e^{2x} \, dx. & 4.3. \int_1^5 x^2 e^{-x} \, dx. \\
4.4. \int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx. & 4.5. \int_0^1 x \ln(1+x^2) \, dx. & 4.6. \int_1^e x \ln x \, dx. \\
4.7. \int_0^1 (x-1) e^{-x} \, dx. & 4.8. \int_0^1 x^2 e^{3x} \, dx. & 4.9. \int_0^{\ln 2} x e^x \, dx. \\
4.10. \int_0^{\pi/3} x \cos 3x \, dx. & 4.11. \int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx. & 4.12. \int_0^3 (x^2+1) e^{-x} \, dx. \\
4.13. \int_0^{e-1} \ln(x+1) \, dx. & 4.14. \int_0^1 x e^{3x} \, dx. & 4.15. \int_0^e \ln^2 x \, dx. \\
4.16. \int_0^1 x e^{-2x} \, dx. & 4.17. \int_0^2 (x+2) e^{-3x} \, dx. & 4.18. \int_0^\pi x \cos x \, dx. \\
4.19. \int_0^1 \arccos x \, dx. & 4.20. \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx. & 4.21. \int_1^2 \ln 3x \, dx. \\
4.22. \int_0^{\pi/4} x \cos 2x \, dx. & 4.23. \int_0^3 \ln(x+3) \, dx. & 4.24. \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx. \\
4.25. \int_0^{\pi/2} x \cos 2x \, dx. & 4.26. \int_0^{\pi/3} (2x+1) \cos 3x \, dx. & 4.27. \int_0^{\pi/3} (1-3x) \sin x \, dx. \\
4.28. \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx. & &
\end{array}$$

Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями:

- 5.1. $y = x^2 - 3x, \quad 3x + y = 4.$
- 5.2. $y = x^3, \quad x = 0, \quad y = 4.$
- 5.3. $y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 0, \quad x = 2, \quad x = 3.$
- 5.4. $y = x^3, \quad y = 2x.$
- 5.5. $y = \sqrt[3]{x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 8.$
- 5.6. $y = x^2 + 1, \quad y = 9 - x^2.$
- 5.7. $y = x^2, \quad y = 3 - x.$
- 5.8. $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2.$
- 5.9. $y = -x^2, \quad x + y + 2 = 0.$
- 5.10. $xy = 2, \quad x + 2y - 5 = 0.$
- 5.11. $y = x(x - 1), \quad y = 0, \quad (y \geq 0).$
- 5.12. $xy = 8, \quad x + y = 9.$
- 5.13. $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1.$
- 5.14. $y^2 = 2x + 1, \quad x - y = 1.$
- 5.15. $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad x = 0.$
- 5.16. $y^3, \quad y = 1, \quad x = 8.$
- 5.17. $y = 1 - x^2, \quad y = x - 1.$
- 5.18. $y = (x - 1)^2, \quad y = x^2, \quad x = 0.$
- 5.19. $y = 2x - x^2, \quad y = -3x + 4.$
- 5.20. $y^2 = 9x, \quad y = 3x.$
- 5.21. $y = 2^x, \quad x = 0, \quad y = 2.$
- 5.22. $y = x^2 + 6x + 10, \quad y = -x.$
- 5.23. $y = x^2, \quad y = 2x^2 - 1.$
- 5.24. $y = 2x, \quad x^2 = 2y.$
- 5.25. $y = 4x - x^2, \quad y = -x.$
- 5.26. $y = 6 - x - 2x^2, \quad y = x + 2.$
- 5.27. $y = e^{-x}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2.$
- 5.28. $y = \frac{3}{x}, \quad x + y = 4.$

Приклад виконання розрахунків

Розглянемо варіант № 28.

Знайти визначені інтегралі:

$$\begin{aligned} 1.28. \int_{-1}^0 \sqrt{5-4x} dx &= \frac{1}{4} \int_{-1}^0 \sqrt{5-4x} d(4x) = -\frac{1}{4} \int_{-1}^0 (5-4x)^{\frac{1}{2}} d(5-4x) = \\ &= -\frac{1}{4} \frac{(5-4x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{4} \left(\frac{(5-4 \cdot 0)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{(5-4 \cdot (-1))^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) = -\frac{2}{3} (5^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.28. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4+1} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2)}{x^4+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 1^2 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.28. \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{3-2x}} &= \left\| \begin{array}{l} t = \sqrt{3-2x}, \\ t^2 = 3-2x, \\ x = \frac{1}{2}(3-t^2), \\ dx = \frac{1}{2}(3-t^2)' dt = -3t dt, \\ t(1) = \sqrt{3-2 \cdot 1} = \sqrt{1} = 1, \\ t(0) = \sqrt{3-2 \cdot 0} = \sqrt{3}. \end{array} \right\| = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^1 \frac{(3-t^2)(-3t dt)}{t} = \\ &= -\frac{3}{2} \int_{\sqrt{3}}^1 (3-t^2) dt = -\frac{3}{2} \left(\int_{\sqrt{3}}^1 3 dt - \int_{\sqrt{3}}^1 t^2 dt \right) = -\frac{3}{2} \left(3t \Big|_{\sqrt{3}}^1 - \frac{t^3}{3} \Big|_{\sqrt{3}}^1 \right) = \\ &= -\frac{3}{2} \left(3 - \sqrt{3} - \frac{(\sqrt{3})^3}{3} + \frac{1}{3} \right) = -\frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} - \sqrt{3} - \sqrt{3} \right) = \\ &= -\frac{3}{2} \left(\frac{4}{3} - 2\sqrt{3} \right) = -3 \left(\frac{2}{3} - \sqrt{3} \right) = 3\sqrt{3} - 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4.28. \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx &= \left\| \begin{array}{l} u = x, \quad du = (x)' dx = dx \\ dv = \cos x \, dx, \quad v = \int dv = \int \cos x \, dx = \sin x \end{array} \right\| = \\
&= x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \cdot \sin 0 + \cos x \Big|_0^{\pi/2} = \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 + \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

5.28. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями:

$$y = \frac{3}{x}, \quad x + y = 4.$$

Знайдемо точки перетину кривих

$$\begin{cases} y = \frac{3}{x}, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

Звернемо увагу на те, що точки перетину містяться на обох кривих. Тому координати цих точок задовольняють рівнянням обох кривих. Таким чином, потрібно скласти систему із рівнянь цих кривих і розв'язати їх.

Розв'яжемо цю систему:

$$\begin{aligned}
y &= \frac{3}{x}, && \text{знайдемо змінну } y \\
x + y &= x + \frac{3}{x} = 4, && \text{підставимо її до другого рівняння} \\
x + \frac{3}{x} - 4 &= 0, \\
\frac{x^2 + 3 - 4x}{x} &= 0, \\
x^2 - 4x + 3 &= 0, && \text{квадратне рівняння} \\
x_1 = 1, \quad x_2 = 3. &&& \text{за теоремою Вієта}
\end{aligned}$$

Таким чином маємо межі інтегрування:

$$a = x_1 = 1, \quad b = x_2 = 3.$$

Звичайно будують фігуру, для цього можна побудувати таблицю координат точок кривих $y = \frac{3}{x}$ і $x + y = 4$, якщо узяти декілька точок в межах інтегрування.

Зауважимо, що крива $y = 4 - x$ вище кривої $y = \frac{3}{x}$ на проміжку інтегрування. Наприклад, обчислимо значення цих функцій у точці $x = 2$, що належить проміжку інтегрування:

$$y(2) = 4 - x|_{x=2} = 4 - 2 = 2, \quad y(2) = \frac{3}{x}|_{x=2} = \frac{3}{2}.$$

За формулою

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

одержимо шукану площу:

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \left(4 - x - \frac{3}{x} \right) dx = 4 \int_1^3 dx - \int_1^3 x dx - 3 \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \\ &= 4x|_1^3 - \frac{x^2}{2}|_1^3 - 3 \ln x|_1^3 = 4(3 - 1) - \frac{3^2}{2} + \frac{1^2}{2} - \ln 3 + \ln 1 = \\ &= 8 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} - \ln 3 = 4 - \ln 3. \end{aligned}$$