2.3 Властивості суми степеневого ряду

Теорема 2.3 Степеневий ряд (2.7) збіжний рівномірно на кожному відрізку, що належить інтервалу збіжності.

Доведення

Нехай $-R < a \le x \le b < R$, де $(-R;R)$ - інтервал збіжності. Доведемо, що на відрізку $[a;b]$ ряд (2.7) збіжний рівномірно. Візьмемо додатне число x_0 таке, що $x_0 > \max(|a|,|b|)$ *і* $x_0 \in (-R;R)$. Тоді для всіх $x \in [a;b]$ виконуватиметься нерівність $|x| < |x_0|$, а отже, і нерівність $|a_n x^n| \le |a_n x_0^n|$.

Але додатний числовий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n|$ збіжний, оскільки точка $x_0 \in (-R;R)$, то за ознакою Вейєрштрасса ряд (2.7) збіжний рівномірно на відрізку $[a;b]$.

Зауваження. На всьому інтервалі збіжності степеневий ряд може бути збіжний нерівномірно. Наприклад, ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

на своєму інтервалі збіжності $-1 < x < 1$ є збіжним нерівномірно, бо нерівність $|S(x) - S_n(x)| = \left|\frac{x^n + 1}{1-x}\right| < \varepsilon$ не може виконуватися для $-1 < x < 1$ при жодному сталому N (адже $\frac{x^n+1}{1-x} \to \infty$ *при* $x \to 1$).

Теорема 2.4 Сума степеневого ряду (2.7) всередині інтервалу збіжності є функція неперервна.

Доведення

Щоб довести неперервність суми степеневого ряду всередині його інтервалу збіжності, досить довести неперервність цієї суми в довільній точці x цього інтервалу. Але точку x завжди можна включити всередину деякого відрізка $[-r;r]$, який повністю міститься всередині інтервалу збіжності. Оскільки на відрізку $[-r;r]$ внаслідок теореми 2.3 ряд (2.7) збіжний рівномірно, а його члени є неперервні функції на цьому відрізку, то за властивістю рівномірно збіжних рядів сума степеневого ряду (2.7) неперервна в точці x.

Теорема 2.5 Степеневий ряд (2.7) можна почленно інтегрувати на кожному відрізку $[a;b]$, що належить інтервалу збіжності $(-R;R)$:

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1 x dx + \int_a^b a_2 x^2 dx + \ldots + \int_a^b a_n x^n dx + \ldots,$$

зокрема $$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x a_0 dx + \int_0^x a_1 x dx + \int_0^x a_2 x^2 dx + \ldots + \int_0^x a_n x^n dx + \ldots$$

для кожного $x_0 \in (-R;R)$.

Доведення

Степеневий ряд (2.7) складається з неперервних функцій, тому його можна почленно інтегрувати на відрізках рівномірної збіжності. Яка б не була точка $x_0 \in (-R;R)$, її завжди можна включити всередину деякого відрізка $[a;b]$, який повністю міститься всередині інтервалу збіжності $(-R;R)$ і містить початок координат. Інтегруючи на цьому відрізку в межах від 0 до *x* ряд (2.7) почленно, дістанемо рівність

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x a_0 dx + \int_0^x a_1 x dx + \int_0^x a_2 x^2 dx + \ldots + \int_0^x a_n x^n dx + \ldots$$

Зауваження. Можна показати, що теорема 2.5 залишається справедливою і у випадку, коли числа a і b (обидва чи одне з них) збігаються з кінцями інтервалу збіжності, якщо тільки ряд (2.7) збіжний у відповідних кінцях.

Теорема 2.6 Степеневий ряд (2.7) можна диференціювати почленно у внутрішніх точках його інтервалу збіжності, тобто якщо

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots ,$$

то $$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \qquad \text{при } -R < x < R.$$

Доведення

Нехай $x \in (-R_1;R_1) \in (-R;R)$. Візьмемо таке x_0, щоб $|x| < |x_0|$, $(x_0 \neq 0)$ і $R_1 < x_0 < R$. Оскільки ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ збіжний, то $a_n x_0^n \to 0$ при $n \to 0$. Отже, знайдеться таке число $k > 0$, що $|a_n x_0^n| \le k$ при всіх n. Оцінимо загальний член ряду $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$ Маємо

$$\left|na_n x^{n-1}\right| = \frac{1}{|x_0|} n\left|a_n x_0^n\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^{n-1} \le \frac{k}{|x_0|} nq^{n-1},$$

де $q = \frac{x}{|x_0|} < 1$. Але при $q < 1$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{k}{|x_0|} nq^{n-1}$ збіжний, бо за ознакою Д'Аламбера при $n \to \infty$ маємо:

$$\frac{k}{|x_0|}(n+1)q^n : \frac{k}{|x_0|} nq^{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) q \to q < 1.$$

Оскільки $|x| < |x_0|$, то останній результат означає, що ряд $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$ збіжний в точці x, $x \in (-R_1; R_1)$. За теоремою 2.3 маємо, що ряд $a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + na_n x^{n-1} + \ldots$ збіжний всередині інтервалу збіжності $(-R; R)$.

Зауваження. Степеневий ряд (2.7) в межах інтервалу збіжності можна диференціювати почленно довільне число раз. При цьому радіуси збіжності всіх рядів, одержаних почленним диференціюванням даного ряду, збігаються з радіусом збіжності вихідного ряду.

Приклад 2.11 Знайти суму ряду $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$

Розв'язування

При $|x| < 1$ даний ряд збіжний. Отже, його можна почленно диференціювати в середині інтервалу збіжності. Позначивши його суму через $S(x)$, маємо

$$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2} + \ldots$$

Оскільки $|x| < 1$, то одержаний ряд похідних як геометрична прогресія із знаменником $q = x^2$ має суму $S'(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Проінтегрувавши ряд

$$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n-2} + \ldots = \frac{1}{1-x^2}$$

знайдемо його суму:

$$S(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots = \int\limits_0^x \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|, \qquad (|x| < 1).$$

2.4 Формула і ряд Тейлора

Нехай функція $f(x)$ має неперервну похідну в деякому околі точки x_0. Тоді за формулою Ньютона - Лейбніца

$$f(x)=f(x_0)+\int_{x_0}^{x} f'(t)dt .$$

Якщо функція $f(x)$ має другу неперервну похідну $f''(x)$, то за формулою інтегрування частинами

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)dt=-\int_{x_0}^{x} f'(t)d(x-t)=-f'(t)(x-t)\Big|_{x_0}^{x}+\int_{x_0}^{x} f''(t)d(x-t)=$$

$$=f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x} f''(t)d(x-t).$$

Отже,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt$$

Далі, якщо $f(x)$ має третю неперервну похідну $f'''(x)$, то

$$\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)dt=\int_{x_0}^{x} f''(t)d\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)=-\frac{1}{2}(x-t)^2 f''(t)\Big|_{x_0}^{x}+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt=f''(x_0)(x-x)^2+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt$$

і $$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 dt .$$

Взагалі, якщо $f(x)$ має $(n+1)$-у неперервну похідну $f^{(n+1)}(x)$, то

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$
$$+\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt .$$

Згідно з узагальненою теоремою про середнє, застосованою до інтеграла

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt ,$$

існує число $c, x_0 < c < x$ таке, що

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(c)\int_{x_0}^{x} (x-t)^n\,dt = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Таким чином, має місце теорема.

Теорема 2.7 Якщо функція $f(x)$ має неперервну похідну $(n+1)$-го порядку в деякому околі точки x_0, то для кожного x цього околу існує точка $c, x_0 < c < x$ така, що

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (2.10)$$

Нехай функція $f(x)$ має похідні будь-яких порядків в деякому околі точки x_0. Тоді степеневий ряд

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots \qquad (2.11)$$

називають *рядом Тейлора функції* $f(x)$ *в точці* x_0.

Для подальшого достатньо буде знайти ряд Тейлора функції $f(x)$ в точці $x_0 = 0$, такий ряд називають *рядом Маклорена*:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (2.12)$$

Умови розкладу функції в ряд Тейлора дає така теорема.

Теорема 2.8 Якщо функція $f(x)$ має похідні будь-яких порядків на відрізку $[-r; r]$, $r > 0$, то на ньому рівність

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \qquad (2.13)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли залишковий член формули Тейлора

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad (2.14)$$

де $0 < \theta < 1$, прямує до нуля.

Доведення

Рівність (2.13) еквівалентна рівності

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right].$$

Остання рівність, враховуючи (2.14), рівносильна умові

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}=0.$$

Наслідок. Якщо функція $f(x)$ має похідні будь-яких порядків на відрізку $[-r;r]$ і всі вони обмежені на ньому $\left|f^n(x)\right|\le K$, то на відрізку $[-r;r]$ функція $f(x)$ розвивається в степеневий ряд:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Доведення

Оскільки функція $f(x)$ має похідні довільних порядків на $[-r;r]$, то для неї можна формально скласти ряд Тейлора (2.11). Доведемо, що він збіжний до $f(x)$. Для цього, за теоремою 2.8, достатньо показати, що залишковий член формули Тейлора

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{2.15}$$

прямує до нуля при $n\to\infty$. Зауважуємо, що

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\le K\frac{r^{(n+1)}}{(n+1)!}. \tag{2.16}$$

Але ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{r^{(n+1)}}{(n+1)!}$ збіжний, бо за ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{r^{(n+2)}}{(n+2)!}:\frac{r^{(n+1)}}{(n+1)!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n+2}=0<1.$$

Тому загальний член ряду $\frac{r^{(n+1)}}{(n+1)!}\to 0$. З нерівності (2.16) випливає, що $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ на відрізку $[-r;r]$.

Зауваження. Можна показати, що якщо функція розкладається в степеневий ряд, то він є рядом Тейлора.

2.5 Розвинення елементарних функцій в ряд Тейлора

1. Функція $f(x)=e^x$.

Оскільки дана функція в кожній точці x числової осі має похідну будь-якого порядку $f'(x)=f''(x)=\ldots=e^x$, то $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=1$ і вона породжує степеневий ряд

$$1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Цей ряд збіжний при будь-якому x саме до функції $f(x)=e^x$, бо на будь-якому відрізку $[-r;r]$ для кожному натурального n:

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=e^x<e^r.$$

Отже,

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad -\infty<x<+\infty. \quad (2.17)$$

2. Функція $f(x)=\sin x$.

Ця функція при будь-якому $x\in(-\infty;+\infty)$ має всі похідні, причому

$$f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad f'''(x)=-\cos x,\quad f^{(4)}(x)=\sin x,$$

$$f^{(5)}(x)=\cos x,\quad f^{(6)}(x)=-\sin x,\ldots$$

або $$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+k\frac{\pi}{2}\right),\qquad k=0,1,2,\ldots$$

Тоді

$$f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & \textit{якщо}\quad k=2n\\ (-1)^k, & \textit{якщо}\quad k=2n+1,\quad n=0,1,2,\ldots\end{cases}$$

Отже ця функція породжує степеневий ряд

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$$

Цей ряд збіжний при будь-якому x саме до функції $f(x)=\sin x$, бо при довільному x і для кожного натурального n :

$$\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right|\le 1.$$

яка виконується при $-1<x<1$ (бо праворуч маємо геометричну прогресію зі знаменником $q=-x$). Використовуючи можливість почленного інтегрування степеневого ряду, дістанемо

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}dx=\int_0^x dx-\int_0^x xdx+\int_0^x x^2dx-\int_0^x x^3dx+\ldots+(-1)^n\int_0^x x^n dx+\ldots$$

або

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,\qquad -1<x<1. \tag{2.20}$$

Таким чином при $-\infty<x<+\infty$ маємо

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \tag{2.18}$$

3. Функція $f(x)=\cos x$.

Рівність

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\qquad -\infty<x<\infty \tag{2.19}$$

доводиться аналогічно рівності (2.18), або почленним диференціюванням останньої.

4. Функція $f(x)=\ln(1+x)$.

Знайдемо ряд Тейлора для цієї функції, виходячи з очевидної рівності

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots,$$

яка виконується при $-1<x<1$ (бо праворуч маємо геометричну прогресію зі знаменником $q=-x$). Використовуючи можливість почленного інтегрування степеневого ряду, дістанемо

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}dx=\int_0^x dx-\int_0^x xdx+\int_0^x x^2dx-\int_0^x x^3dx+\ldots+(-1)^n\int_0^x x^n dx+\ldots$$

або

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots,\qquad -1<x<1. \tag{2.20}$$

5. Функція $f(x) = arctgx$.

Інтегруючи рівність

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,$$

справедливу при $|x| < 1$ (геометрична професія зі знаменником $q = -x^2$), дістанемо

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \int_0^x x^6 dx + \ldots + (-1)^n \int_0^x x^{2n} dx + \ldots$$

або

$$\text{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

Як і в попередньому прикладі можна довести, що остання рівність виконується при $x = \pm 1$.

Отже,

$$\boxed{\text{arctgx} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad -1 < x < 1. \quad (2.21)}$$

6. Функція $f(x) = (1+x)^\alpha$, де α - довільне дійсне число.

Для цієї функції маємо

$$f'(x) = \alpha(1+x)^\alpha, \quad f''(x) = \alpha(\alpha - x)(1+x)^{\alpha-2}, \ldots,$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-2}, \ldots,$$

тому функція $f(x) = (1+x)^\alpha$ породжує степеневий ряд ($x_0 = 0$)

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!}x^2 + \ldots$$

і його називають біноміальним рядом.

Оскільки за ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{n+1}n!}{(n+1)!\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha-n)x}{n+1}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha}{n}-1}{1+\frac{1}{n}} = |x|,$$

то біноміальний ряд збіжний при $|x| < 1$ і розбіжний при $|x| > 1$.

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots, \quad -1 < x < 1.} \quad (2.25$$