Застосування теорії рядів

1. Наближене обчислення значень функцій

Нехай функція $f(x)$ в деякому проміжку розвивається в степеневий ряд

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots$$

Тоді легко наближено обчислити значення функції $f(x)$ шляхом заміни її скінченним числом перших членів цього розкладу.

Чим менше $|x|$, тим менше членів береться для обчислення $f(x)$ з бажаною точністю. Якщо x дуже мале, то достатньо обмежитись тільки двома першими членами, відкинувши всі останні. Таким чином, дістаємо дуже просту формулу для $f(x)$, яка при малих $|x|$ цілком може замінити часто досить складний точний вираз для $f(x)$.

а) Обчислення значень тригонометричних функцій

Степеневі ряди можна використати для обчислення значень тригонометричних функцій

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \qquad (2.18)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots, \quad -\infty<x<\infty \qquad (2.19)$$

Оскільки ряди знакозмінні, то залишок ряду не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів. Для $\sin x$ і $\cos x$

матимемо
$$|r_n(x)|\le\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2.30) \qquad |r_n(x)|\le\frac{|x|^{2n}}{(2n)!}. \quad (2.31)$$

Користуючись формулами (2.30) і (2.31), можна підібрати найменше число n таке, щоб дістати значення sinx і cosx з наперед заданою точністю.

Відмітимо, що ряди (2.18) і (2.19) швидше збігаються при малих значеннях $x>0$. Доцільно обчислювати за допомогою цих рядів значення синуса і косинуса для кутів від 0^0 до 15^0. Значення ж цих функцій для кутів від 15^0 до 45^0 легко обчислити, якщо скористатись формулами:

$$\sin\left(30^0\pm x\right)=\frac{1}{2}\cos x\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x, \quad \cos\left(30^0\pm x\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\mp\frac{1}{2}\sin x.$$

А значення функцій sinx та cosx для кутів від 45^0 до 90^0 знаходяться за допомогою формул зведення.

Зауваження. Для обчислення кути, виражені в градусах потрібно перевести в радіани.

Приклад 2.12 Обчислити $\sin 20^0$ з точністю до 10^{-4}.

Розв'язування

Переводимо градусну міру в радіанну: $\frac{2\pi}{360}20 = \frac{\pi}{9}$.

Підставляючи в розклад (2.18), дістанемо

$$\sin\frac{\pi}{9} = -\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \ldots$$

Обмежившись виписаними членами, ми робимо помилку не більшу за

$$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^4 < \frac{1}{120}(0{,}3)^4 < 6\cdot 10^{-5}.$$

Обчислюючи кожний доданок із п'ятьма знаками, дістанемо

$$\sin\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 = 0{,}34889 - 0{,}00708 = 0{,}34181.$$

б) Обчислення логарифмів

Оскільки ряд (2.20) збіжний повільно, то застосовувати цей ряд для обчислення натуральних логарифмів нераціонально. Для обчислення логарифмів використовують інший ряд. Для степеневого ряду (2.20) замість x розглянемо $-x$, при цьому вважатимемо, що $|-x| < 1$.

Маємо

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots \qquad (2.32)$$

Віднімемо почленно від ряду (2.20) ряд (2.32). Дістанемо степеневий ряд

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right), \quad |x| < 1.$$

Нехай $x = \frac{1}{2m+1}$, де m – натуральне число. Тоді $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m+1}{m}$. Тому

$$\ln\frac{m+1}{m} = 2\left[\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{3(2m+1)^3} + \frac{1}{5(2m+1)^5} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}} + \ldots\right]$$

або $$\boxed{\ln(m+1)=\ln m+2\left[\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{3(2m+1)^3}+\frac{1}{5(2m+1)^5}+\dots\right]. \qquad (2.33)}$$

Ряд (2.33) і використовується для обчислення логарифмів натуральних чисел. Зазначимо, що ця наближена формула дає похибку

$$2\left[\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}}+\frac{1}{(2n+3)(2m+1)^{2n+3}}+\dots\right]<$$

$$<\frac{2}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}}\left[1+\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^4}+\dots\right]=$$

$$=\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(2m+1)^2}}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n-1}2m(2m+2)}<\frac{1}{(2n+1)m(2m+1)^{2n}}.$$

Приклад 2.13 Обчислити $\ln 3$ за наближеною формулою (2.33), взявши $n=3$.

Розв'язування

$$\ln 3=\ln 2+2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}\right]=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot3^3}+\frac{1}{5\cdot3^5}\right]+2\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3\cdot5^3}+\frac{1}{5\cdot5^5}\right]\approx 1{,}09546.$$

в) Наближене обчислення коренів.

Для обчислення коренів застосовують біноміальний ряд

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\dots,$$

збіжний при $|x|<1$ і розбіжний при $|x|>1$.

Приклад 2.14 Обчислити $\sqrt[3]{33}$ з точністю до 10^{-3}.

Розв'язування

Запишемо $\sqrt[3]{33}$ так:

$$\sqrt[3]{33}=\sqrt[3]{27+6}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{2}{9}\right)}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}.$$

Використовуючи біномний ряд, дістанемо

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}=\left(1+\frac{2}{9}\right)^{1/3}=1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^3-\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^4+\dots$$

Помічаємо, що одержаний числовий рад знакозмінний, тому залишок ряду не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів. Розглянемо п'ятий член цього ряду:

$$\frac{1}{4!}\cdot\frac{80\cdot 2^4}{3^4 9^4}=\frac{160}{3^{14}}=\frac{160}{4743603}<10^{-4}.$$

Отже, $\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}$ з точністю до 10^{-3} можна обчислити за допомогою наближеної формули

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}\approx 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^3\approx 1{,}1248115$$

Звідси $\sqrt[3]{33}=3\cdot\sqrt[3]{1+\frac{2}{9}}\approx 3{,}3744345$, при цьому перші три цифри після коми правильні.

2. Обчислення визначених інтегралів

Якщо підінтегральна функція у визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ є неперервною на відрізку $[a;b]$, однак її первісна $F(x)$ не є функцією елементарною, то формула Н'ютона - Лейбніца $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ не дає змогу виконати обчислення цього інтеграла. Обчислити такі інтеграли можна, якщо функція *f(x)* розвивається в степеневий ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

рівномірно збіжний до $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Використовуючи теорему про почленне інтегрування ряду, дістанемо

$$\int_a^b f(x)dx=a_0\int_a^b dx+a_1\int_a^b xdx+a_2\int_a^b x^2dx+a_3\int_a^b x^3dx+\ldots+a_n\int_a^b x^ndx+\ldots$$

Звідси

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right)}{n+1}.$$

Обчисливши з відповідною точністю суму ряду, знайдемо з тією ж точністю значення визначеного інтеграла.

Приклад 2.15 Обчислити визначений інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ з точністю до 10^{-5}.

Розв'язування

Первісна функція для функції $\frac{\sin x}{x}$ не є елементарною. Оскільки для всіх $x \in (-\infty;+\infty)$ має місце рівність

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

то для цих же x правильна і рівність

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots,$$

На відрізку $[0;1]$ цей ряд збіжний рівномірно, тому

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \frac{x^2}{3!}dx + \int\limits_0^1 \frac{x^4}{5!}dx - \int\limits_0^1 \frac{x^6}{7!} + \ldots =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \ldots \right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \ldots$$

Оскільки одержаний числовий ряд знакозмінний, то залишок ряду не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів. Розглянемо четвертий член цього ряду:

$$\frac{1}{7\cdot 7!} = 2{,}834\cdot 10^{-5} < 0{,}0001.$$

Отже, з точністю до 10^{-4} одержуємо

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} \approx 0{,}98932,$$

причому перші чотири цифри точні.

3. Інтегрування диференціальних рівнянь

Нехай потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння другого порядку

$$y'' = F(x, y, y'), \tag{2.34}$$

що задовольняє початкові умови

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \tag{2. 35}$$

Припустимо, що розв'язок $y = f(x)$ існує і може бути поданий у вигляді ряду Тейлора

$$y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \qquad (2.36)$$

Для знаходження коефіцієнтів ряду (2.36) використаємо рівняння (2.34) і умови (2.35).

Дійсно, з умов (2.35) випливає, що

$$f(0) = y_0, \quad f'(0) = y_0';$$

з рівняння (2.34) одержуємо

$$f''(0) = y''(0) = F(0, y_0, y_0').$$

Диференціюючи обидві частини рівняння (2.34) за змінною x маємо:

$$y''' = F_x'(x, y, y') + F_y'(x, y, y') \cdot y' + F_{y'}'(x, y, y') \cdot y'', \qquad (2.37)$$

підставляючи значення $x = 0, y(0) = y_0, y'(0) = y_0'$ в праву частину рівності (2.37), знайдемо $f'''(0) = y'''(0)$.

Диференціюючи співвідношення(2.37), знайдемо $f^{IV}(0) = y^{IV}(0)$ і т. д.

Знайдені значення похідних підставляємо в рівність (2.36). Для тих значень x, для яких цей ряд збіжний, це і буде розв'язок рівняння.

Приклад 2.16 Знайти чотири перших члени розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' - (1 + x^2)y = 0$ за початкових умов $y(0) = -2, \quad y'(0) = 2$.

Розв'язування

Підставивши в рівняння початкові умови, одержимо $y''(0) = 1 \cdot (-2) = -2$.

Диференціюючи початкове рівняння, послідовно знаходимо

$$y''' = 2xy + (1 + x^2)y' \qquad y'''(0) = 2,$$

$$y^{IV} = 2y + 2xy' + 2xy' + (1 + x^2)y'' = 2y + 4xy' + (1 + x^2)y'', \qquad y^{IV}(0) = -6.$$

Підставляючи знайдені значення похідних в ряд (2.36), одержимо

$$y(x) = -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots$$

Оскільки нам потрібні лише перші чотири члени розвинення в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння, то

$$y(x) \approx -2 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Зауваження. Початкові умови (2.35), звичайно, можна замінити умовами вигляду $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0$, де x_0, y_0, y_0' – дані числа. При цьому ряд для розв'язку буде вже не за степенями x, а за степенями різниці $x - x_0$.