ТЕМА 1 ЧИСЛОВІ РЯДИ

При розв'язуванні багатьох задач математики з'являється необхідність розглядати суми, які складаються з нескінченної множини доданків. З теорії дійсних чисел відомо, що означає сума будь-якої скінченної множини чисел. Задача додавання нескінченної множини деяких однотипних об'єктів (чисел, функцій і т.п.) постійно зустрічається в математиці.

Вже в шкільному курсі математики доводиться мати справу з виразами, що містять нескінченну множину доданків. Справді, перетворюючи звичайний дріб у десятковий, ми пишемо

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots.$$

1.1 Поняття числового ряду. Збіжні і розбіжні ряди

Нехай задана числова послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Числовим рядом називають вираз

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,, \qquad (1.1)$$

де числа $a_1, a_2, \ldots$ називають його членами, a_n - загальним членом ряду.

Суму n перших членів ряду (1.1):

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.2)$$

називають *n-ю частинною сумою ряду (1.1).*

Коли n набуває значення 1, 2, 3, ... , одержимо послідовність частинних сум

$$S_1, S_2 \ldots, S_n \ldots \qquad (1.3)$$

У вище наведеному прикладі

$$S_1 = \frac{3}{10}, \quad S_2 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100}, \quad S_3 = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{100},$$

причому із збільшенням індексу ці частинні суми все менше будуть відрізнятися від числа $\frac{1}{3}$, точніше число $\frac{1}{3}$ є границею цих частинних сум. А тому природним стає таке важливе означення.

Якщо існує скінченна границя послідовності частинних сум (1.3) ряду (1.1), то цю границю називають сумою ряду (1.1) і записують

$$S = a_1+a_2+a_3 + \dots +a_n + \dots, \tag{1.4}$$

тобто

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S.} \tag{1.5}$$

Ряд, який має суму, називається *збіжним*.

У випадку, коли границя послідовності частинних сум нескінченна або не існує, ряд називають *розбіжним*.

Приклад 1.1 Знайти суму ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Розв'язування

Подамо його частинну суму у вигляді, зручному для граничного переходу:

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\dots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})=1-\frac{1}{n+1}.$$

Звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ і

$$1=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}+\dots.$$

Теорема 1.1 (необхідна умова збіжності ряду). Якщо ряд (1.1) збігається, то його загальний член a_n прямує до нуля при $n \to\infty$.

Доведення

Оскільки числовий ряд збіжний, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=S \text{ і } a_n=S_n-S_{n-1},$$

тому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Зауваження. Дана ознака використовується тільки для встановлення розбіжності ряду.

Приклад 1.2 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+1} = \frac{1}{101} + \frac{1}{201} + \ldots$

Розв'язування

Оскільки границя загального члена цього ряду

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{100n+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{100+\frac{1}{n}} = \frac{1}{100} \neq 0$$

відмінна від нуля, то цей ряд є розбіжним.

Теорема 1.2 Ряд, складений з членів геометричної прогресії

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (a \neq 0) \qquad (1.6)$$

збіжний до $\frac{a}{1-q}$ при $|q|<1$ і розбіжний при $|q| \geq 1$.

Доведення

Дійсно, нехай $|q| \geq 1$. Тоді загальний член ряду $|aq^{n-1}| \geq 1$ і ряд (1.6) є розбіжним.

Нехай тепер $|q|<1$. Але при $q \neq 1$

$$S_n = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n.$$

Оскільки $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q|<1$, то $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.

Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} \qquad (1.7)$$

називають *гармонічним.* Для нього, очевидно, виконується необхідна ознака збіжності: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Доведемо, що він є розбіжним. Справді, відомо, що $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Звідси $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$ або $\frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$. Додаючи нерівності, які одержимо звідси при $n = 1, 2, 3, \ldots, k$, дістанемо

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{k} [\ln(n+1) - \ln n] = \ln(k+1).$$

Оскільки $ln(k+1) \to \infty$ при $k \to +\infty$, то й поготів $S_k \to +\infty$, тобто гармонічний ряд розбіжний.

1.2 Найпростіші властивості збіжних рядів

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний, то різницю $r_n = S - S_n$ між його сумою і частинною сумою називають залишком даного ряду.

З означення збіжності випливає, що $r \to 0$ $(n \to \infty)$. Залишок r_n збіжного ряду є величина нескінченно мала при $n \to \infty$ (розбіжний ряд залишку не має). Оскільки

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} + \ldots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad \text{то}$$

$$r_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}.$$

Теорема 1.3 Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ збігається і має суму S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n$ також збігається і має суму cS.

Доведення

Нехай S_n - частинна сума даного ряду, тоді $S_n \to S$ і $cS_n \to cS$. Але cS_n - частинна сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n$, тому $\sum_{k=1}^{\infty} ca_n = cS$.

Теорема 1.4 Якщо ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ збіжні і мають відповідно суми S і σ, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ збігається і має суму $S+\sigma$.

Доведення

Якщо S_n *і* σ_n — частинні суми рядів $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ і за умовою $S_n \to S$, $\sigma_n \to \sigma$, то $S_n + \sigma_n \to S + \sigma$. Оскільки $S_n + \sigma_n$ частинна сума ряду $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, тс $\sum_{k=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S + \sigma$.

Зауваження. Збіжні ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ можна почленно віднімати, оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ є сумою двох збіжних рядів $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{k=1}^{\infty}(-b_n)$.

1.3 Додатні ряди. Ознаки збіжності

Тепер розглянемо ряди, всі члени яких є невід'ємні числа. За традицією їх називають *рядами з додатними членами*, або додатними рядами.

Теорема 1.9 (перша ознака порівняння). Якщо для членів додатних рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{1.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots \tag{1.9}$$

виконуються нерівності $a_n \le b_n$ для всіх n, починаючи з деякого, то із збіжності ряду (1.9) випливає збіжність ряду (1.8), а з розбіжності ряду (1.8) випливає розбіжність ряду (1.9).

Доведення

Нехай S_n і σ_n - частинні суми рядів (1.8) і (1.9), тоді справедливі нерівності $S_n \le \sigma_n$.

Припустимо, що ряд (1.9) збіжний. Тоді послідовність $\{\sigma_n\}$, згідно з теоремою 1.8, обмежена зверху, а, отже, обмежена і послідовність частинних сум $\{S_n\}$, тому за теоремою 1.8 ряд (1.8) збіжний.

Нехай ряд (1.8) розбіжний. Тоді і ряд (1.9) розбіжний, бо якби останній був збіжним, то за доведеним вище і ряд (1.8) збіжний.

Приклад 1.4 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \ldots$$

Розв'язування

Зауважуємо, що

$$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{2n}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Оскільки кожен член даного додатного ряду менший відповідного члена збіжної геометричної прогресії із знаменником $q = \frac{1}{2} < 1$, то вихідний ряд також збіжний.

Приклад 1.5 Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1} + \ldots$$

Розв'язування

Оскільки $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ розбіжний, то розбіжний і даний ряд.

Теорема 1.10 (друга ознака порівняння). Якщо для додатних рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ існує скінченна додатна границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, то ці ряди збіжні або розбіжні одночасно.

Доведення

Яке б не було число $k > 0$, то знайдуться додатні числа p і q такі, що $p < k < q$. Внаслідок умови $\frac{a_n}{b_n} \to k$ для всіх n, починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність $p < \frac{a_n}{b_n} < q$ або $pb_n < a_n < qb_n$.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, то збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} qb_n$. Внаслідок нерівності $a_n < qb_n$, за теоремою 1.9, збіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Коли ж ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ розбіжний, то розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} pb_n$. Внаслідок нерівності $pb_n < a_n$, за теоремою 1.9, розбіжний і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Приклад 1.6 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$.

Розв'язування

Доцільно порівняти даний ряд із збіжним рядом $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Маємо

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{n}{2^n}} = 1 > 0$ (бо за правилом Лопіталя

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2^x\ln 2}=0$) і за теоремою 1.10 даний ряд також збіжний

Приклад 1.7 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n\sqrt{n}}$.

Розв'язування

Порівняємо даний ряд з розбіжним гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1>0$, бо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

За теоремою 1.10 даний ряд є розбіжним.

Теорема 1.11 (ознака Д'Аламбера). Якщо для додатного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l\geq 0, \qquad (1.10)$$

то при $l<1$ даний ряд збіжний, а при $l>1$ - розбіжний.

Доведення

Нехай $l<1$. Тоді знайдеться додатне число q таке, що $l<q<1$. Внаслідок рівності (1.10) для всіх значень n, починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$, а тому

$$a_{n+1}<a_nq,\quad a_{n+2}<a_{n+1}q<a_nq^2\quad a_{n+3}<a_{n+2}q<a_nq^3,\ldots, \qquad (1.11)$$

тобто члени додатного ряду

$$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\ldots \qquad (1.12)$$

не перевищують відповідних членів додатного ряду

$$a_nq+a_nq^2+a_nq^3+\ldots \qquad (1.13)$$

Оскільки ряд (1.13) збіжний, як геометрична прогресія із знаменником $q<1$, то ряд (1.12), а з ним і даний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, також збіжний.

Якщо $l>1$, то внаслідок умови (1.10) для всіх значень n, починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ або $a_n < a_{n+1}$. Звідси випливає, що загальний член ряду не прямує до нуля при $n \to \infty$, і тому ряд буде розбіжним.

Приклад 1.8 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$

Розв'язування

Оскільки
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1,$$
то за ознакою Д'Аламбера даний ряд збіжний.

Приклад 1.9 Довести збіжність ряду $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots$

Доведення

Маємо
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

Границя цього відношення дорівнює 1/2, тобто за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

Зазначимо, що ознаку Д'Аламбера не можна застосовувати при $l = 1$.

Наприклад, для кожного з рядів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *і* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. При цьому перший ряд розбіжний, а другий збіжний, оскільки $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n(n+1)} \right)$ – збіжний (див. приклад 1.1).

Теорема 1.11 (гранична ознака Коші). Якщо для додатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l, \tag{1.14}$$
то при $l < 1$ даний ряд збіжний, а при $l > 1$ - розбіжний.

Доведення

Нехай $l < 1$. Тоді знайдеться число $q > 0$ таке, що $l < q < 1$. Внаслідок рівності (1.14) для всіх n, починаючи з деякого, виконуватиметься нерівність $\sqrt[n]{a_n} < q$, тому

$$a_n < q^n, a_{n+1} < q^{n+1}, a_{n+2} < q^{n+2}, \ldots.$$

Тобто члени ряду $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ не перевищують відповідних членів збіжної геометричної прогресії $q^n + q^{n+1} + q^{n+2} + \ldots$ Отже даний ряд збіжний.

Якщо $l > 1$, то внаслідок рівності (1.14), починаючи з деякого n, матимемо $\sqrt[n]{a_n} > 1$ або $a_n > 1$. Звідси випливає, що a_n не прямує до 0 при $n \to \infty$ і, отже, даний ряд розбіжний.

Приклад 1.10 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Розв'язування

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

то за ознакою Коші даний ряд збіжний.

Приклад 1.11 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Розв'язування

Для даного ряду

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1,$$

тому питання про його збіжність ознакою Коші не вирішується. Зрозуміло, що цей ряд розбіжний, бо не виконується необхідна ознака збіжності:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0.$$

Теорема 1.12 (інтегральна ознака Коші-Маклорена). Якщо $f(x)$- невід'ємна і незростаюча функція на проміжку $[1;+\infty]$, то ряд

$$f(1) + f(2) + f(3) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \quad (1.15)$$

і невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \quad (1.16)$$

або обидва збіжні або обидва розбіжні.

Доведення

Оскільки функція *f(x)* незростаюча, то при $k \le x \le k+1$ матимемо $f(k+1) \le f(x) \le f(k)$. Функція $f(x)$ монотонна та інтегровна на відрізку

$[k;k+1]$. Почленне інтегрування цих нерівностей у межах від k *до* $k+1$ дає

$$f(k+1)\le\int_{k}^{k+1}f(x)\le f(k). \qquad (1.17)$$

Приймаючи в цих нерівностях $k=1,2,...,n-1$ і додаючи почленно, дістанемо

$$f(2)+f(3)+...+f(n)\le\int^{n}f(x)dx\le f(1)+f(2)+...+f(n-1).$$

Якщо S_n- частинна сума ряду (1.15), то останні нерівності можна переписати так

$$S_n-f(1)\le\int_{1}^{n}f(x)dx\le S_{n-1}$$

і звідки

$$S_n\le f(1)\le\int_{1}^{n}f(x)dx, \qquad (1.18)$$

$$S_{n-1}\ge\int_{1}^{n}f(x)dx. \qquad (1.19)$$

Зауважимо, що послідовність $\left\{\int_{1}^{n}f(x)dx\right\}$ неспадна. Справді,

$$\int_{1}^{n+1}f(x)dx=\int_{1}^{n}f(x)dx+\int_{n}^{n+1}f(x)dx\ge\int_{1}^{n+1}f(x)dx \qquad \text{бо } f(x)\ge 0.$$

Нехай невласний інтеграл (1.16) збіжний. Це означає, що існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty}\int_{1}^{n}f(x)dx=L, \text{ причому } \int_{1}^{n}f(x)dx\le L.$$

З нерівності (1.18) одержуємо $S_n\le f(x)+L$, тобто частинні суми додатного ряду (1.15) обмежені зверху, і тому ряд (1.15) збіжний.

Нехай тепер невласний інтеграл (1.16) розбіжний. Це означає, що $\int_{1}^{n}f(x)dx\to+\infty$ при $n\to\infty$, а тоді з нерівності (1.19) випливає, що й $S_{n-1}\to+\infty$, тобто ряд (1.15) розбіжний.

Зауваження. Теорема залишається справедливою, якщо функція $f(x)$ має вказані властивості для $x\ge m$. В ній потрібно лише замінити $\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ *і* $\int_{1}^{+\infty}f(x)dx$ відповідно на $\sum_{n=m}^{\infty}f(n)$ *і* $\int_{m}^{+\infty}f(x)dx$.

Приклад 1.13 Довести, що узагальнений гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots+\frac{1}{n^\alpha}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$$

збіжний при $\alpha>1$, і розбіжний при $\alpha\le 1$.

Доведення

Зауважимо, що члени цього ряду є значеннями функції $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ при $x=1,2,3,\ldots$. При $\alpha>0$ ця функція додатна і спадна на проміжку $[1;+\infty]$.

Як відомо, невласний інтеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, *де* $\alpha>0$, збіжний при $\alpha>1$ і розбіжний при $\alpha\le 1$. Тому за інтегральною ознакою Коші даний ряд збіжний при $\alpha>1$ і розбіжний при $0<\alpha\le 1$. Якщо ж $\alpha\le 0$, то розбіжність ряду очевидна, бо в цьому випадку загальний член $a_n=\frac{1}{n^\alpha}$ не прямує до нуля.

Приклад 1.14 Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

Розв'язування

Очевидно, що члени цього ряду є значеннями функції $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ при $x=2,3,\ldots,n,\ldots$. Ця функція додатна і спадна на проміжку $[2;+\infty]$. Користуючись означенням, дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\ln x\right]_2^b=\lim_{b\to+\infty}\left[\ln\ln b-\ln\ln 2\right]=+\infty.$$

Оскільки цей інтеграл розбіжний, то за інтегральною ознакою Коші розбіжним є і даний ряд.