Розвинення функцій у ряди Тейлора та Маклорена

Приклад 1 Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = xe^{-x^2}$.

Розв'язування

Використаємо розвинення експоненти, підставивши замість x величину $-x^2$. Маємо

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Помноживши обидві частини останньої рівності на x, отримаємо

$$xe^{-x^2} = x - \frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2!} - \frac{x^7}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Приклад 2. Функцію $y = \dfrac{1}{x}$ розвинути в ряд Тейлора з центром в точці $x_0 = 3$.

Розв'язування

За формулою Тейлора маємо:

$$y'(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad y''(x) = \frac{2}{x^3},\ y'''(x) = -\frac{2\cdot 3}{x^4}, \ldots,\ y^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}};$$

звідки

$$y(3) = \frac{1}{3}, \quad y'(3) = -\frac{1}{3^2}, \qquad y''(3) = \frac{2!}{3^3}, \ldots, \qquad y^{(n)}(3) = (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}};$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-3) + \frac{2!}{3^3}(x-3)^2 + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{3^{n+1}}(x-3)^n + \ldots$$

Приклад 3. $y = \cos^2 x$.

Подамо дану функцію у вигляді:

$$y = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Скористаємось розвиненням $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < z < +\infty.$

Покладемо тут $z = 2x$. У наслідку дістанемо:

$$y = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Приклад 4. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$.

Скористаємось розвиненням в біноміальний ряд при $\alpha=-1/2$:

$$(1+z)^{-1/2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}z^n,\quad -1<z<1.$$

Покладемо тут $z=-2x$. У наслідку дістанемо:

$$y=x(1-2x)^{-1/2}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-2x)^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^n2^nx^{n+1},\quad -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}.$$

Приклад 5. $y=\dfrac{x}{1+x-2x^2}$.

Розкладемо даний дріб на елементарні дроби:

$$y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right).$$

Згідно з розвиненням $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,\ -1<x<1$ маємо:

$$\frac{1}{1+2x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^xx^n,\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}.$$

Звідси дістаємо:

$$y=\frac{1}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n2^xx^n\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(1-(-1)^n2^n)x^n,\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}.$$

Приклад 6. $y=\ln\left(1+x+x^2+x^3\right)$.

Перетворимо дану функцію наступним чином:

$$y=\ln\left(1+x+x^2+x^3\right)=\ln\left((1+x)\left(1+x^2\right)\right)=\ln(1+x)+\ln\left(1+x^2\right),\ x>-1.$$

Скористаємось розвиненням $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1},\ -1<x\le 1,$

$$\ln\left(1+x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x^2\right)^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1},\ -1\le x\le 1.$$

Тому

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left((-1)^n+2\sin\frac{n\pi}{2}\right)x^{n+1},\ \ -1<x\le 1\,.$$

Завдання для самостійної роботи

Розкласти в ряд Маклорена функцію

1. $y=xe^{-3x}$
2. $y=\sin^2 x;$
3. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}};$
4. $y=\dfrac{1}{1-x^2};$
5. $y=\ln(1-3x);$
6. $y=\cos^2 x;$
7. $y=\dfrac{3}{(x-2)(x+1)};$
8. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}};$