Дослідження абсолютної та умовної збіжності знакопочережних рядів

Приклади

1. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots \quad .$$

Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца.

$$1)\quad 1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\ldots>\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}>\ldots \ ; \quad 2)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

тобто обидві умови виконано, отже, ряд збіжний. Складемо ряд з модулей членів даного ряду:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

А це гармонічний ряд, який є розбіжним (п. 1.5). Таким чином, наш ряд збігається умовно.

2. Дослідити на абсолютну і умовну збіжність ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\ldots \quad .$$

Оскільки $1>\frac{1}{2!}>\frac{1}{3!}>\ldots$ і $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!}=0$,

то умови ознаки Лейбніца виконано, і ряд збіжний. Складемо ряд з абсолютних величин членів нашого ряду:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}+\ldots$$

За ознакою Даламбера легко довести, що цей ряд збіжний (зробіть самостійно). Отже наш ряд збігається абсолютно.

3. Дослідити на збіжність ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Маємо:

$$\cos\frac{\pi n^2}{n+1}=(-1)^n\cos\left(\pi\frac{n^2}{n+1}-\pi n\right)=(-1)^n\cos\left(\frac{\pi}{n+1}-\pi\right)=(-1)^{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right).$$

Розглянемо ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$. Оскільки $\frac{1}{\ln^2(n+1)}<\frac{1}{\ln^2 n}$, і $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln^2 n}=0$, то за ознакою Лейбніца цей ряд збігається. Послідовність $\left\{\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right\}$ монотонно зростає і обмежена. Отже, за ознакою Абеля наш ряд збігається.

Приклад 1.22 Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Розв'язування

Для дослідження на абсолютну збіжність розглянемо ряд з модулів членів даного ряду. Цей ряд такий

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}};$$

він є розбіжним як узагальнений гармонічний ряд з $\alpha=\frac{1}{2}<1$. Такий результат означає, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ не збіжний абсолютно.

Перевіримо умовну збіжність. Члени даного ряду монотонно спадають за абсолютною величиною і загальний член цього ряду прямує до нуля $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\to 0$ при $n\to\infty$. За ознакою Лейбніца (теорема 1.14) даний ряд збіжний.

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ умовно збіжний.

Дослідити самостійно на абсолютну та умовну збіжність приклади:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n+1}}$ 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(2n-1)}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+n+1}$ 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot arctg\,\frac{1}{n^2}$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot arctg\,\frac{1}{\sqrt{n}}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot\sqrt{n}}{n^2+3}$ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{\sqrt{n^3+1}}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\ln(1+\frac{1}{n})$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\ln(1+\frac{1}{n^2})$