Дослідження області збіжності степеневих рядів.

Приклад 2.6 Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\cdot x^n$.

Розв'язування

Скористаємось ознакою Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n}=\lim_{n\to\infty}(n+1)|x|=+\infty$$ при довільному $x\neq 0$ і

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{n!|x|^n}=0$$ в точці x=0.

Таким чином, даний ряд збіжний лише в одній точці x=0.

Приклад 2.7 Визначити область збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Розв'язування

За ознакою Д'Аламбера, маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!|x|^{n+1}}{(n+1)!|x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

для будь-яких значень аргументу x. Це означає, що даний степеневий ряд збіжний на всій числовій осі Ox.

Приклад 2.8 Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\frac{x}{10}+\frac{x^2}{200}+\frac{x^3}{3000}+...+\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+....$$

Розв'язування

Радіус збіжності знаходимо за першою з формул (2.9)

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 10^n},\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)\cdot 10^{n+1}},$$

тому

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^n}=10\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=10.$$

Отже, даний ряд збіжний для всіх значень x, що належать інтервалу $(-10,10)$.

Дослідимо поведінку ряду на кінцях проміжку. Підставляючи в даний ряд замість x число 10, одержимо розбіжний гармонічний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

При $x=-10$ одержуємо числовий знакозмінний ряд

$$-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n}+\ldots,$$ який збіжний умовно.

Таким чином, інтервалом збіжності даного степеневого ряду є пів-відрізок [-1;10).

Приклад 2.9 Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\frac{1^2}{2^2}+\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{x^4}{2^2}+\ldots+\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{x^{2n}}{2^n}+\ldots$$

Розв'язування

В даному випадку не можна застосувати формули (2.9) для відшукання радіуса збіжності даного ряду, оскільки він не містить непарних степенів *x*.

Для відшукання інтервалу збіжності застосуємо безпосередньо ознаку Д'Аламбера. Маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2x^{2n+2}}{(n+2)^2x^{2n+1}}:\frac{n^2x^{2n}}{(n+1)^2x^{2n}}\right|=\frac{x^2}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4}{(n+1)^2}=\frac{x^2}{2}.$$

Отже, ряд збіжний, якщо $x^2<2$, і розбіжний, якщо $x^2>2$. Таким чином, $R=\sqrt{2}$. З'ясуємо, чи збіжний даний ряд при $x=\pm\sqrt{2}$. Підставляючи $x=\pm\sqrt{2}$, одержуємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}$, який розбіжний, оскільки його загальний член не прямує до нуля при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1.$$

Отже, інтервал збіжності даного ряду $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Приклад 2.10 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$.

Розв'язування

Застосуємо ознаку Коші, прийнявши $U_n=\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|}=\lim_{n\leftarrow\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(x-1)^{n(n+1)}}{n^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-1|^{n+1}}{n}=\begin{cases}0 & при \quad |x-1|\le 1,\\ \infty & при \quad |x-1|>1.\end{cases}$$

Таким чином, ряд збіжний при $|x-1|\le 1$, тобто на відрізку $[0;2]$.

Завдання для самостійної роботи на практичному занятті

Дослідити інтервали збіжності степеневих рядів..

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{3n^2(n+1)}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 \cdot 4^n}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n(n+1)}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2n\ (n+2)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{(n+3) \cdot 2^n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(n^2+1) \cdot 9^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(n+6)^2}$