1.6 Розв'язування задач із використанням ознак збіжності рядів

Приклад 1.18 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$.

Розв'язування

Використаємо другу ознаку порівняння. Розглянемо збіжний узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 - 4n + 5} = 1,$$

за теоремою 1.10 даний ряд також збіжний.

Приклад 1.19 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(arctg \frac{1}{n} \right)^4$.

Розв'язування

Використаємо другу ознаку порівняння. Розглянемо збіжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(arctg \frac{1}{n} \right)^4}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{arctg \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^4 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{arctg \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right)^4 = 1,$$

за теоремою 1.10 даний ряд також збіжний.

Приклад 1.20 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^n}$.

Розв'язування

Використаємо ознаку Д'Аламбера (теорема 1.11).

$$a_n = \frac{(n+1)!}{3^n},\ a_{n+1} = \frac{(n+2)!}{3^{n+1}};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+2)!}{3^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! \cdot 3^n}{(n+1)! \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)! \cdot (n+2)}{(n+1)!} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (n+2) = \infty > 1 \cdot$$

За ознакою Д'Аламбера даний ряд розбіжний.

Приклад 1.21 Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Розв'язування

Застосуємо інтегральну ознаку Коші (теорема 1.12). Функція

$f(x)=\dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ невід'ємна та незростаюча на проміжку $[1,+\infty)$. Дослідимо на збіжність невласний інтеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx=-2\lim_{b\to+\infty}\int_1^{b}e^{-\sqrt{x}}d(-\sqrt{x})=-2\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^b\right)=$$

$$=-2\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{\sqrt{b}}}-\frac{1}{e^{\sqrt{1}}}\right)=-2\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^{\sqrt{b}}}+2\cdot\frac{1}{e}=\frac{2}{e}.$$

Оскільки невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ збіжний, то за інтегральною ознакою Коші буде збіжним і даний ряд.

Завдання для самостійної роботи

Дослідити на збіжність ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{(2n+1)^2}\qquad\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\arcsin\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\qquad\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12n^3+3n+1}{\sqrt[3]{n^2}\,(n^4+2)}\qquad\qquad\sum_{n=1}^{\infty}4^n\arcsin\frac{\pi}{5^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}\qquad\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt[3]{n^2}}}{\sqrt[3]{n^5}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{50}}\qquad\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot5\cdot9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{2^n\cdot n!}\qquad\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^5(n+1)}$$

ИДЗ по теме будет идти отдельным файлом. Это практическое занятие.