

## Застосування рядів для наближеного вирішення диференціальних рівнянь

Нехай треба розв'язати задачу Коші:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Припустимо, що розв'язок цієї задачі можна розкласти в ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ \dots + \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

Ми розв'яжемо задачу, якщо знайдемо значення функції  $y(x)$  та її похідних у точці  $x = x_0$ . Значення самої функції  $y(x)$  маємо з початкової умови:  $y(x_0) = y_0$ . Далі:

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)),$$

$$y''(x_0) = (y'(x))' \Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} (f(x, y(x))) \Big|_{x=x_0} = \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) \Big|_{x=x_0} = \\ = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} f(x_0, y_0),$$

...

Аналогічно розв'язується задача Коші для рівнянь вищих порядків.

Іноді роблять інакше. Шукають розв'язок  $y(x)$  у вигляді степеневого ряду загального виду:

$$y(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots,$$

підставляють його у рівняння (3.6.1), а потім у лівій і правій частинах зрівнюють коефіцієнти при однакових степенях  $(x - x_0)$ , внаслідок чого знаходяться  $a_0, a_1, a_2, \dots$

**Приклад 1.** Знайти три перших, відмінних від нуля, члени розкладу в ряд розв'язку задачі Коші:

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \dots$$

Маємо:

$$y(1) = -1, \quad y'(1) = 1^2 + (-1)^2 = 2,$$

$$y''(x) = 2x + 3y^2 y', \quad y''(1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1)^2 \cdot 2 = 8,$$

$$y'''(x) = 2 + 6y(y')^2 + 3y^2 y'', \quad y'''(1) = 8,$$

отже

$$y(x) \approx -1 + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{8}{3!}(x-1)^3 = -1 + (x-1)^2 + \frac{4}{3}(x-1)^3.$$

**Приклад 2** Використовуючи розвинення в ряд Тейлора-Маклорена, виписати перші чотири, відмінних від нуля, члени розвинення розв'язку диференціального рівняння

$$y' = x^2 + xy + 1, \quad y(0) = 1.$$

**Розв'язування**

Нехай  $y(x)$  – розв'язок рівняння. Тоді

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Оскільки за умовою  $y(0) = 1$ , знайдемо  $y'(0)$ , підставивши в рівняння  $x = 0$ ,  $y(0) = 1$ . Маємо

$$y'(0) = 0^2 + 0 \cdot 1 + 1 = 1.$$

Для обчислення  $y''(0)$  продиференціюємо за змінною  $x$  обидві частини диференціального рівняння:

$$y'' = 2x + y + xy' \quad (\leftarrow)$$

Підставивши в одержане рівняння  $x = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ , одержимо:

$$y''(0) = 2 \cdot 0 + 1 + 0 \cdot 1 = 1.$$

Диференціюючи рівняння  $(\leftarrow)$  за змінною  $x$ , одержимо:

$$y''' = 2 + 2y' + xy''.$$

Підставляючи в останнє рівняння  $x = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ ,  $y''(0) = 1$ , маємо

$$y'''(0) = 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 4.$$

Підставляючи знайдені значення  $y'(0)$ ,  $y''(0)$  та  $y'''(0)$  в розвинення  $y(x)$  одержимо

$$y(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!}.$$

**Завдання для самостійної роботи**

*Використовуючи розклад в ряд Тейлора, обчислити перші чотири відмінні від нуля члени розв'язку диференціального рівняння*

1.  $y' = e^x + x^2 y^2, \quad y(0) = 0$

2.  $y' = 3y^2 + xy, \quad y(0) = \frac{1}{3};$

3.  $y' = \sin x + xy, \quad y(0) = 1;$

4.  $y' = \cos x + xy^2, \quad y(0) = 2;$

5.  $y' = x^3 + 2xy^2, \quad y(0) = 2;$

6.  $y' = xy^3 + y, \quad y(0) = 1;$