## . Метод інтегрування частинами

Цей метод застосовується тоді, коли підінтегральний вираз містить добуток функцій, причому хоча б одна з них є трансцендентною (не степеневою).

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функції, що мають на деякому проміжку неперервні похідні. Розглянемо диференціал добутку цих функцій:

$$d(uv) = u\,dv + v\,du\,.$$

Інтегруючи обидві частини рівності, одержимо $\int d(u \cdot v) = \int u\,dv + \int v\,du$, або

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du\,.$$

Формула називається ***формулою інтегрування частинами***.

***Ідея методу*** полягає в тому, що в підінтегральному виразі $f(x)dx$ необхідно правильно виділити ***два співмножники*** $u$ та $dv$. За "$u$", як правило, обирають множник, який при диференціюванні спрощується. Інша частина підінтегрального виразу містить множник "$dv$". Його слід вибирати так, щоб інтегруванням можна було знайти $v$. При цьому вважають, що стала $C = 0$.

Після виділення $u$ та $dv$ необхідно знайти $du$ і $v$: $du = u'(x)dx$, $v = \int dv$, а потім скористатися формулою (. В цій рівності інтеграл $\int vdu$ простіше або подібний попередньому інтегралу $\int udv$.

**Приклад** Обчислити інтеграл $\int x\sin 3x dx$.

***Розв'язання.*** 
$$\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin 3xdx}_{dv} = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin 3xdx \\ du = (x')dx = dx & v = \int \sin 3xdx = -\dfrac{1}{3}\cos 3x \end{array} \right| =$$

$$= \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)}_{v} - \int \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)}_{v}\underbrace{dx}_{du} = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\sin 3x + C\,.$$

Спробуємо навпаки:

$$\int \underbrace{\sin 3x}_{u}\,\underbrace{xdx}_{dv} = \left| \begin{array}{ll} u = \sin 3x & dv = xdx \\ du = (\sin 3x)'\,dx = 3\cos 3xdx & v = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \underbrace{\sin 3x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} -$$

$$- \int \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{v} \cdot \underbrace{3\cos 3xdx}_{du}\,.$$

У результаті хибного використання формули інтегрування частинами отриманий інтеграл виявився складніше попереднього.

Надамо рекомендації до застосування формули (10.3).

а) В інтегралах вигляду (група I)

$$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx} \\ a^{kx} \end{Bmatrix}dx,$$ де $P_n(x)$ – многочлен степеня $n$, $k \in R$ доцільно обирати $u = P_n(x)$, $dv = \begin{Bmatrix} \sin kx \\ \cos kx \\ e^{kx} \\ a^{kx} \end{Bmatrix}dx$.

б) В інтегралах вигляду (група II)

$$\int P_n(x)\begin{Bmatrix} \log_a x \\ \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ arctgx \\ arcctgx \end{Bmatrix}dx$$ маємо $u = \begin{Bmatrix} \log_a x \\ \ln x \\ \arcsin x \\ \arccos x \\ arctgx \\ arcctgx \end{Bmatrix}$;

$dv = P_n(x)dx$.

Зауважимо, що в групі II іноді $P_n(x) = 1$. Тоді $dv = dx$.

в) Інтеграли вигляду $\int e^{kx}\sin lxdx$, $\int e^{kx}\cos lxdx$, де $k$, $l$ – дійсні числа (група III). Тут після двократного застосування формули (10.3) утворюється лінійне рівняння відносно шуканого інтеграла. Розв'язуючи це рівняння, знаходять цей інтеграл.

**Приклад** Обчислити інтеграл $\int \ln xdx$.

***Розв'язання.*** $\int \ln xdx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x}dx & v = \int dx = x \end{vmatrix} = \ln x \cdot x -$

$- \int x \cdot \frac{1}{x}dx = \ln x \cdot x - \int dx = \ln x \cdot x - x + C$.

**Зауваження** Метод інтегрування частинами може бути застосований двічі або, навіть, тричі, у залежності від степеня многочлена $P_n(x)$.

**Приклад** Обчислити інтеграл $\int\left(x^2+1\right)e^{2x}dx$.

***Розв'язання.*** $\int\left(x^2+1\right)e^{2x}dx=\begin{vmatrix} u=x^2+1 & dv=e^{2x}dx \\ du=2xdx & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{vmatrix}=\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-$

$$-\int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2xdx=\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int xe^{2x}dx=\begin{vmatrix} u=x & dv=e^{2x}dx \\ du=dx & v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{vmatrix}=\left(x^2+1\right)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-$$

$$-\left(x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)e^{2x}-\frac{1}{2}x\cdot e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}+C.$$

**Приклад** Знайти інтеграли:

1) $\int(3x-1)e^{2x}dx$; 3) $\int e^{-4x}\cos 5xdx$;

2) $\int\sqrt{x}\,\ln^2 xdx$; 4) $\int e^{\sqrt{x}}dx$;

5) $\int e^{2x}\sin e^{x}dx$.

***Розв'язання.*** 1) $\int(3x-1)e^{2x}dx\overset{гр.I}{=}\begin{vmatrix} u=3x-1 & dv=e^{2x}dx \\ du=3dx & v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x} \\ & (c=0)\end{vmatrix}=$

$$=(3x-1)\cdot\frac{1}{2}e^{2x}-\int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 3dx=\frac{3x-1}{2}\cdot e^{2x}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x}+C.$$

2) $\int\sqrt{x}\,\ln^2 xdx\overset{гр.II}{=}\begin{vmatrix} u=\ln^2 x & dv=\sqrt{x}dx \\ du=2\ln x\cdot\frac{1}{x}dx & v=\int\sqrt{x}dx=2\sqrt{x^3}\big/3\end{vmatrix}=\ln^2 x\times$

$$\times\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{2}{3}\cdot 2\int\sqrt{x^3}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}dx=\ln^2 x\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{4}{3}\int\sqrt{x}\cdot\ln xdx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=\ln x & dv=\sqrt{x}dx \\ du=\frac{1}{x}dx & v=\int\sqrt{x}dx=2\sqrt{x^3}\big/3\end{vmatrix}=\ln^2 x\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{4}{3}\left(\ln x\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{3}\int\sqrt{x^3}\cdot\frac{1}{x}dx\right)=\ln^2 x\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{4}{3}\left(\ln x\cdot\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\sqrt{x^3}\right)+C=\frac{2}{27}\times$$

$$\times\sqrt{x^3}\left(9\ln^2 x-12\ln x+8\right)+C.$$

$$3)\int e^{-4x}\cos 5x\,dx \overset{гр.III}{=} \left| \begin{array}{ll} u=\cos 5x & dv=e^{-4x}dx \\ du=-5\sin 5x\,dx & v=\int e^{-4x}dx=-\dfrac{1}{4}e^{-4x} \end{array} \right| =$$

$$=\cos 5x\cdot\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right)-\int\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right)\cdot\left(-5\sin 5x\right)dx=-\frac{1}{4}\cos 5x\cdot e^{-4x}-$$

$$-\frac{5}{4}\int e^{-4x}\cdot\sin 5x\,dx=\left| \begin{array}{ll} u=\sin 5x & dv=e^{-4x}dx \\ du=5\cos 5x\,dx & v=-\dfrac{1}{4}e^{-4x} \end{array} \right|=-\frac{1}{4}\cos 5x\cdot e^{-4x}-$$

$$-\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\cdot\sin 5x-\int\left(-\frac{1}{4}e^{-4x}\right)\cdot 5\cos 5x\,dx\right)=-\frac{1}{4}\cos 5x\cdot e^{-4x}+\frac{5}{16}e^{-4x}\times$$

$$\times\sin 5x-\frac{25}{16}\int e^{-4x}\cos 5x\,dx.$$

Запишемо рівняння щодо шуканого інтеграла $I$:

$$I=\frac{e^{-4x}}{16}\left(5\sin 5x-4\cos 5x\right)-\frac{25}{16}I.$$

Звідси $\left(1+\dfrac{25}{16}\right)I=\dfrac{e^{-4x}}{16}\left(5\sin 5x-4\cos 5x\right)$.

Таким чином, дістанемо

$$I=\int e^{-4x}\cos 5x\,dx=\frac{e^{-4x}}{41}\left(5\sin 5x-4\cos 5x\right)+C.$$

$$4)\int e^{\sqrt{x}}dx=\left| \begin{array}{l} x=t^2 \\ dx=2t\,dt \\ t=\sqrt{x} \end{array} \right|=2\int e^t t\,dt=\left| \begin{array}{ll} u=t & dv=e^t dt \\ du=dt & v=e^t \end{array} \right|=2\left(t\cdot e^t-\int e^t dt\right)=$$

$$=2\left(t\cdot e^t-e^t\right)+C=2\left(\sqrt{x}\cdot e^{\sqrt{x}}-e^{\sqrt{x}}\right)+C.$$

$$5)\int e^{2x}\sin e^x dx=\left| \begin{array}{ll} u=e^x & dv=e^x\cdot\sin e^x dx \\ du=e^x dx & v=\int\sin e^x\cdot e^x dx=\int\sin e^x d\left(e^x\right)= \\ & =-\cos e^x \end{array} \right|=$$

$$=-e^x\cdot\cos e^x+\int\cos e^x\cdot e^x dx=-e^x\cdot\cos e^x+\int\cos e^x d\left(e^x\right)=-e^x\cos e^x+$$

$$+\sin e^x+C.$$

Після вивчення наведених матеріалів самостійно виконати приклади з файла **integraClasses. Зробити завдання № 9 з індивідуальних завдань.**