Інтегрування елементарних дробів

Дроби $\frac{A}{x-a}$, $\frac{B}{(x-a)^k}$, $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, де A, B, N, M, a, p, q – дійсні числа, а $k \in N$, і тричлен x^2+px+q не має дійсних коренів, називають ***елементарними*** або ***найпростішими***.

Знайдемо невизначені інтеграли від елементарних дробів. Інтеграли від найпростіших дробів І-го та ІІ-го типів знаходять методом безпосереднього інтегрування:

I. $$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\,ln|x-a| + C.$$

II. $$\int \frac{Bdx}{(x-a)^k} = B\int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = B\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C =$$

$$= \frac{B}{(-k+1)(x-a)^{k-1}} + C.$$

При інтегруванні найпростішого дробу ІІІ-го типу треба спочатку в знаменнику виділити повний квадрат, а потім той вираз, що під квадратом, замінити через нову змінну.

III. $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q}dx = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x+{}^{p}\!/_{2} = t \\ dx = dt \\ x = t-{}^{p}\!/_{2} \\ q-{}^{p^2}\!/_{4} = k^2 \end{array} \right| = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+k^2}dt = \int \frac{Mtdt}{t^2+k^2} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dt}{t^2+k^2} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+k^2)}{t^2+k^2} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dt}{t^2+k^2} \overset{табл.(4),(15)}{=} \frac{M}{2}ln(t^2+k^2) + \frac{2N-Mp}{2}\cdot\frac{1}{k}arctg\frac{t}{k} +$$
$$+C.$$

Повертаючись до змінної x, та враховуючи. Що $k^2 = \frac{4q-p^2}{4}$ або $k = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}}$, одержимо:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} ln\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right) + \frac{2N-Mp}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \times$$

$$\times arctg \frac{\left(x+\frac{p}{2}\right)\cdot 2}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Зауваження Інтеграл від найпростішого дробу типу IV шляхом повторного інтегрування частинами зводять до інтеграла від найпростішого дробу типу III.

Приклад Обчислити інтеграли: а) $\int \frac{3}{x-2}dx$; б) $\int \frac{5}{(x-2)^3}dx$; в) $\int \frac{4}{x^2+2x+10}dx$; г) $\int \frac{5x+1}{x^2-2x+5}dx$.

Розв'язання. а) $\int \frac{3}{x-2}dx = 3\int \frac{d(x-2)}{x-2} = 3\,ln|x-2| + C$.

б) $\int \frac{5}{(x-2)^3}dx = 5\int (x-2)^{-3}d(x-2) = 5\frac{(x-2)^{-3+1}}{-3+1} + C = 5\frac{(x-2)^{-2}}{-2} + C =$

$= -\frac{5}{2(x-2)^2} + C$.

в) $\int \frac{4}{x^2+2x+10}dx = 4\int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+10} = 4\int \frac{dx}{(x+1)^2+9} = \begin{vmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{vmatrix} =$

$= 4\int \frac{dt}{t^2+9} = 4 \cdot \frac{1}{3} arctg \frac{t}{3} + C = \frac{4}{3} arctg \frac{x+1}{3} + C$.

г) $\int \frac{5x+1}{x^2-2x+5}dx = \int \frac{5x+1}{x^2-2x+1-1+5}dx = \int \frac{5x+1}{(x-1)^2+4}dx = \begin{vmatrix} x-1=t \\ dx=dt \\ x=t+1 \end{vmatrix} =$

$= \int \frac{5(t+1)+1}{t^2+4}dt = \int \frac{5t+6}{t^2+4}dt = \int \frac{5tdt}{t^2+4} = \int \frac{6dt}{t^2+4} = 5 \cdot \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+4} + 6\int \frac{dt}{t^2+4} =$

$= \frac{5}{2} ln\left(t^2+4\right) + 6 \cdot \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = |t = x-1| = \frac{5}{2} ln\left((x-1)^2+4\right) + 3arctg \frac{x-1}{2} + C$.

ЛЕКЦІЯ ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Відношення двох алгебраїчних многочленів

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n$, $Q_m(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+...+b_mx^m$, $a_n\neq 0$, $b_m\neq 0$; $n\in Z$, $m\in N$, називається ***раціональною функцією*** або ***раціональним дробом***. Якщо $n<m$, то раціональний дріб називається ***правильним***. Так, наприклад, $\frac{4x^3-2x+7}{2x^5+7x^2+3}$ – правильний дріб, а дріб $\frac{7x^4+3x^2-2}{9x^2+x}$ – неправильний.

Якщо $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ дріб неправильний, тоді треба поділити чисельник на знаменник (за правилом ділення многочленів [1]) і одержати заданий дріб у вигляді суми многочлена (частки цього ділення) та правильного дробу, тобто

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=M_{n-m}(x)+\frac{R(x)}{Q_m(x)},$$

де $R(x)$ – залишок від ділення.

<u>Теорема</u> Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів вигляду

$$\frac{A}{x-a},\ \frac{B}{(x-a)^k},\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \frac{Cx+D}{\left(x^2+px+q\right)^r},$$

де k, $r\in N$, $A,B,C,D,M,N,p,q,a\in R$, а квадратний тричлен не має дійсних коренів.

Це роблять ***методом невизначених коефіцієнтів***.

Отже, інтегрування раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена $M_{n-m}(x)$ та суми простіших дробів

Зауваження Вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q_m(x)$.

Можливі такі випадки.

1. Корені знаменника дійсні та різні, тобто

$Q_m(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_m)$.

У цьому випадку дріб $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів І-го типу:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A_1}{x-\alpha_1}+\frac{A_2}{x-\alpha_2}+...+\frac{A_m}{x-\alpha_m}.$$

2. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, наприклад $Q_m(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^k$, $k+1=m$.

Тоді дріб $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів I-го та II-го типів:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+...+\frac{B_k}{(x-\beta)^k}.$$

3. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, крім того знаменник містить квадратний тричлен x^2+px+q з комплексними коренями (дискримінант $p^2-4q<0$), який не розкладається на множники

$$Q_m(x)=(x-\alpha)(x-\beta)^k\cdot\left(x^2+px+q\right).$$

В цьому випадку дріб $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ розкладається на суму простіших дробів I-го, II-го та III-го типів:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{B_1}{x-\beta}+\frac{B_2}{(x-\beta)^2}+...+\frac{B_k}{(x-\beta)^k}+\frac{Mx+N}{x^2+px+q}.$$

$$(k+3=m)$$

Зауваження Метод невизначених коефіцієнтів дає алгоритм для знаходження коефіцієнтів розкладу правильного раціонального дробу на суму простіших . Зводимо праву частину рівності до спільного знаменника. Прирівнюємо многочлени чисельників правої і лівої частини, а потім прирівнюємо відповідні коефіцієнти при однакових степенях x обох чисельників, оскільки якщо два многочлени рівні між собою, то вони мають рівні коефіцієнти при x в однакових степенях. Отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язки її є коефіцієнтами розкладу.

Зауваження Крім методу порівняння коефіцієнтів, користуються також ***методом окремих значень аргументу***. Можна знайти невідомі коефіцієнти після того як запишемо рівняння многочленів, надаючи x числові значення. Система рівнянь значно спрощується, коли змінній x надавати значення дійсних коренів знаменника $Q_m(x)$.

Приклад Знайти інтеграл $\int\frac{x^3-3x-12}{x^3-7x^2+12x}dx$.

Приклад Знайти інтеграл $\int \frac{x^3-3x-12}{x^3-7x^2+12x}dx$.

Розв'язання. 1. Дріб $\frac{x^3-3x-12}{x^3-7x^2+12x}$ неправильний $(n=m=3)$. Виділимо цілу частину. Для цього поділимо чисельник на знаменник "кутом":

$$\begin{array}{r|l} -\ x^3-3x-12 & x^3-7x^2+12 \\ \underline{x^3-7x^2+12x} & \overline{1} \\ 7x^2-15x-12 & \end{array}$$

Отже, $\frac{x^3-3x-12}{x^3-7x^2+12x}=1+\frac{7x^2-15x-12}{x^3-7x^2+12x}$.

2. Знаменник правильного раціонального дробу розкладемо на співмножники:

$x^3-7x^2+12x=x\left(x^2-7x+12\right)$,

$x_1=0$; $x^2-7x+12=0$,

$x_{2,3}=\frac{7\pm\sqrt{7^2-4\cdot1\cdot12}}{2\cdot1}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm1}{2}$,

$x_2=4$; $x_3=3$.

Отже, $x^3-7x^2+12x=x(x-4)(x-3)$.

Застосуємо формулу : $\frac{7x^2-15x-12}{x(x-3)(x-4)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x-4}$.

3. У запису розкладання правильного раціонального дробу на найпростіші дроби приведемо праву частину до спільного знаменника

$$\frac{7x^2-15x-12}{x(x-3)(x-4)}=\frac{A(x-3)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x-3)}{x(x-3)(x-4)}.$$

Прирівняємо чисельники лівої і правої частини цього рівняння

$A(x-3)(x-4)+Bx(x-4)+Cx(x-3)=7x^2-15x-12$.

Для знаходження коефіцієнтів A, B, C застосуємо ***метод окремих значень аргумента***, а саме, підставимо в останнє рівняння по черзі $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=4$.

Покладемо $x=0$, одержимо $12A=-12$, $A=-1$.

При $x=3$ маємо $-3B=6$, $B=-2$.

При $x=4$ дістанемо $4C=40$, $C=10$.

Отже, одержали $\frac{7x^2-15x-12}{x(x-3)(x-4)}=-\frac{1}{x}-\frac{2}{x-3}+\frac{10}{x-4}$.

4. Отже $\int \frac{x^3-3x-12}{x^3-7x^2+12x}dx = \int\left(1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x-3}+\frac{10}{x-4}\right)dx = \int dx - \int\frac{dx}{x} -$

$-2\int\frac{dx}{x-3}+10\int\frac{dx}{x-4} = x - ln|x| - 2\,ln|x-3| + 10\,ln|x-4| + C$.

Приклад [1] Знайти інтеграл $\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^3}dx$.

Розв'язання. 1. Підінтегральний дріб правильний. Розкладемо його на елементарні. Знаменник має чотири дійсних корені, серед них є кратні: $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

Отже, $\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$.

2. Застосуємо загальну схему для знаходження невідомих коефіцієнтів. У цьому прикладі зручно скористатись ***комбінованим*** методом, тобто деякі з невідомих коефіцієнтів визначимо, надаючи x значення дійсних коренів знаменника, а інші визначимо методом порівняння.

$x^2+1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx$.

$$
\begin{array}{l|c}
x=0 & 1=-A;\ A=-1; \\
x=1 & 2=D;\ D=2; \\
x^3 & 0=A+B;\ B=-A=1; \\
x^2 & 1=-3A-2B+C;\ C=1+3A+2B=1-3+2=0.
\end{array}
$$

Маємо $\frac{x^2+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^3}$.

3. Отже, $\int\frac{x^2+1}{x(x-1)^3}dx = \int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)dx = -ln|x| + ln|x-1| -$

$-\frac{2}{2(x-1)^2}+C = ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{1}{(x-1)^2}+C$.