ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ . ІНТЕГРУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Для інтегрування раціонального дробу $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ послідовно виконуються три кроки.

Крок 1. Перевіримо чи правильний раціональний дріб. Якщо неправильний, виділимо цілу частину шляхом ділення чисельника на знаменник “кутом”. Отже,

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx = \int \left(M_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)} \right) dx,\ (n \ge m, k < m).$$

Крок 2. Представимо правильний раціональний дріб $\dfrac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ як суму найпростіших з невизначеними коефіцієнтами, для чого розкладемо знаменник на лінійні та квадратичні множники виду $x-a$, $(x-a)^k$, x^2+px+q.

Крок 3. Знайдемо невизначені коефіцієнти розкладів , методом ***невизначених коефіцієнтів*** або методом ***окремих значень аргументу***.

Крок 4. Знайдемо інтеграли від цілої частини та від суми найпростіших дробів.

Приклад Проінтегрувати елементарні (найпростіші) дроби:

1) $\displaystyle\int \frac{3dx}{x-4}$; 2) $\displaystyle\int \frac{3dx}{(x-4)^2}$; 3) $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx$.

Розв'язання. 1) $\displaystyle\int \frac{3dx}{x-4} = 3\ln|x-4| + C$.

2) $$\int \frac{3dx}{(x-4)^2} = 3\int (x-4)^{-2}dx = 3\cdot\frac{(x-4)^{-1}}{-1} + C = -\frac{3}{x-4} + C.$$

3) $$\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{x+5}{(x^2+2x+1)+4}dx = \int \frac{x+5}{(x+1)^2+4}dx = \left| \begin{matrix} x+1=t \\ dx=dt \\ x=t-1 \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{t-1+5}{t^2+4}dt = \int \frac{tdt}{t^2+4} + 4\int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + 4\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}\ln((x+1)^2+4) +$$

$$+ 2arctg\frac{x+1}{2} + C.$$

Приклад Виділити цілу частину дробу діленням многочленів “кутом”: $\dfrac{x^5+x^2-1}{x^2+x+1}$.

Розв'язання. Ділення припиняють тоді, коли степінь остачі стане меншим за степінь дільника:

$$
\begin{array}{llll}
- & x^5+x^2-1 & & \multicolumn{1}{|l}{x^2+x+1} \\
 & \underline{x^5+x^4+x^3} & & \multicolumn{1}{|l}{\overline{x^3-x^2+2}} \\
 & \quad - & -x^4-x^3+x^2-1 & \\
 & & \underline{-x^4-x^3-x^2} & \\
 & & \quad - \; 2x^2-1 & \\
 & & \quad\;\; \underline{2x^2+2x+3} & \\
 & & \qquad\quad -2x-3. &
\end{array}
$$

Маємо $\dfrac{x^5+x^2-1}{x^2+x+1}=x^3-x^2+2+\dfrac{-2x-3}{x^2+x+1}$.

Приклад Розкласти правильні дроби на елементарні:

1) $\dfrac{3x+1}{(x-4)(x+7)^3}$; 2) $\dfrac{x}{x^3-8}$; 3) $\dfrac{3x+4}{x^4-6x^3+9x^2}$.

Розв'язання. 1) $\dfrac{3x+1}{(x-4)(x+7)^3}=\underbrace{\dfrac{A}{x-4}}_{\text{відповідає }(x-4)}+\underbrace{\dfrac{B_1}{x+7}+\dfrac{B_2}{(x+7)^2}+\dfrac{B_3}{(x+7)^3}}_{\text{відповідає }(x+7)^3}$.

2) $\dfrac{x}{x^3-8}=\dfrac{x}{(x-2)\underbrace{(x^2+2x+4)}_{D<0}}=\underbrace{\dfrac{A}{x-2}}_{\text{відповідає }(x-2)}+\underbrace{\dfrac{Mx+N}{x^2+2x+4}}_{\text{відповідає }(x^2+2x+4)}$.

3) $\dfrac{3x+4}{x^4-6x^3+9x^2}=\dfrac{3x+4}{x^2(x^2-6x+9)}=\dfrac{3x+4}{x^2(x-3)^2}=\dfrac{A_1}{x}+\dfrac{A_2}{x^2}+\dfrac{B_1}{x-3}+$

$+\dfrac{B_2}{(x-3)^2}$.

Випадок 1. Знаменник має тільки дійсні корені.

Приклад Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}dx$.

Розв'язання. Дріб $\displaystyle\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}$ неправильний.

Крок 1. Виділяємо цілу частину неправильного дробу:

$$\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x}=5+\frac{9x^2-2x-8}{x^3-4x}.$$

Крок 2. Правильний дріб розкладаємо на суму елементарних (найпростіших) дробів:

$$x^3-4x=x\left(x^2-4\right)=x(x-2)(x+2).$$

$$\frac{9x^2-2x-8}{x(x-2)(x+2)}\overset{форм.(11.3)}{=}\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Крок 3. Приведемо праву частину до спільного знаменника

$$\frac{9x^2-2x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}.$$

Прирівнюємо чисельник лівої і правої частин цього рівняння (знаменники у них рівні):

$$9x^2-2x-8=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2).$$

Застосуємо для знаходження коефіцієнтів A, B, C метод невизначених коефіцієнтів. Два многочлена того самого степеня тотожно рівні, якщо вони мають рівні коефіцієнти при однакових степенях. Отже, прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x та одержимо систему рівнянь:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 9=A+B+C \\ x & -2=2B-2C \\ x^0 & -8=-4A \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C=9 \\ B-C=-1 \\ A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=9 \\ 2B=8-A \\ A=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=9-A-B \\ B=3 \\ A=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C=4 \\ B=3 \\ A=2 \end{cases}.$$

Зауваження Знаходження коефіцієнтів можна значно спростити, підставляючи у тото[illegible]ість зручні значення – дійсні корені знаменника (метод окремих значень аргументу).

Підставляємо в тотожність значення:

$$x=0 \ \Rightarrow \ -8=-4A \Rightarrow A=2;$$

$$x=2 \ \Rightarrow \ 24=8B \ \Rightarrow B=3;$$

$$x=-2 \ \Rightarrow \ 32=8C \ \Rightarrow C=4.$$

Таким чином, одержимо

$$\frac{9x^2-2x-8}{x(x-2)(x+2)}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}.$$

Крок 4. Інтегруємо суму цілої частини дробу і елементарних дробів:

$$\int\frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x(x-2)(x+2)}dx=\int 5dx+\int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x+2}\right)dx=5x+2\ln|x|+$$

$$+3\ln|x-2|+4\ln|x+2|+C.$$

Випадок 2. Знаменник має дійсні корені, деякі з них кратні.

Приклад Знайти інтеграл $\int \frac{3x+4}{x^2(x-1)}dx$.

Розв'язання. Підінтегральний дріб правильний. Розкладемо його на елементарні:

$$\frac{3x+4}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)};$$

$$3x+4=Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2.$$

Надаємо x значення, що дорівнюють дійсним кореням знаменника:

$$x=0 \ \Rightarrow \ 4=-B \ \Rightarrow \ B=-4;$$
$$x=1 \ \Rightarrow \ 7=C \ \Rightarrow \ C=7.$$

Для знаходження коефіцієнта A порівняємо коефіцієнти при x^2 у лівій і правій частинах тотожності: $x^2: \ 0=A+C \ \Rightarrow \ A+7=0 \ \Rightarrow \ A=-7$.

Отже, маємо $\frac{3x+4}{x^2(x-1)}=-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{x-1}$.

Тоді $\int \frac{3x+4}{x^2(x-1)}dx=\int\left(-\frac{7}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{x-1}\right)dx=-7\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2}+7\int\frac{dx}{x-1}=$

$=-7\,ln|x|+\frac{4}{x}+7\,ln|x-1|+C$.

Випадок 3. Серед коренів знаменника є дійсні і комплексно-спряжені.

Приклад Знайти інтеграл $\int \frac{3x^2-5x+1}{x^4+9x^2}dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є правильним дробом. Розкладемо його на елементарні. Для цього спочатку знаменник розкладемо на множники $x^4+9x^2=x^2(x^2+9)$.

$$\frac{3x^2-5x+1}{x^4+9x^2}\overset{форм.(11.5)}{=}\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+9}=\frac{A(x^2+9)+B(x^3+9x)+Mx^3+Nx^2}{x^2(x^2+9)}.$$

Прирівняємо чисельники лівої і правої частин:

$$3x^2-5x+1=A(x^2+9)+B(x^3+9x)+Mx^3+Nx^2.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо систему рівнянь

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & B+M=0 \quad \Rightarrow \quad M=-B=5/9; \\
x^2 & A+N=3 \quad \Rightarrow \quad N=3-A=3-1/9=26/9; \\
x & 9B=-5 \quad \Rightarrow \quad B=-5/9; \\
x^0 & 9A=1 \quad \Rightarrow \quad A=1/9.
\end{array}$$

Отже, дістанемо $\dfrac{3x^2-5x+1}{x^4+9x^2}=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{x}{x^2+9}+\dfrac{26}{9}\cdot\dfrac{1}{x^2+9}$.

Маємо $\displaystyle\int\frac{3x^2-5x+1}{x^4+9x^2}dx=\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{x}+\frac{5}{9}\int\frac{xdx}{x^2+9}+\frac{26}{9}\int\frac{dx}{x^2+9}=-\frac{1}{9x}-$

$\displaystyle-\frac{5}{9}ln|x|+\frac{5}{18}ln\left(x^2+9\right)+\frac{26}{27}arctg\frac{x}{3}+C$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли:

1) $\displaystyle\int\frac{2x^2+41x-9}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$;

2) $\displaystyle\frac{dx}{6x^3-7x^2-3x}$;

3) $\displaystyle\int\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$;

4) $\displaystyle\int\frac{7x^3-9}{x^4-5x^3+6x^2}dx$;

5) $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^3+8}dx$;

6) $\displaystyle\int\frac{x^3+5x^2+12x+4}{(x+2)^2\left(x^2+4\right)}dx$.