Заняття 8

1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла

Площа криволінійної трапеції

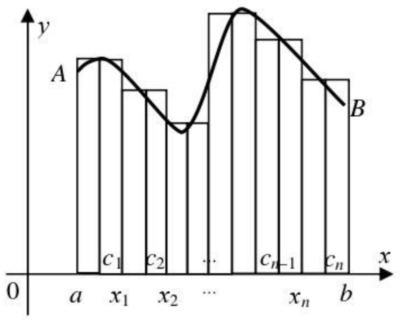

Рисунок 1.1

Нехай на сегменті $[a;b]$ задана неперервна невід'ємна функція $y=f(x)$. Криволінійною трапецією називається фігура, яка утворена відрізком $[a;b]$ осі OX, прямими, що задані рівняннями $x = a$ та $x = b$ і графіком функції $y=f(x)$ (рис. 1.1).

Знайдемо площу криволінійної трапеції ***aABв***. Площа такої фігури не може бути знайдена за допомогою відомих з елементарної геометрії.

Отже, будемо шукати інший спосіб.

Відрізок $[a;b]$ розіб'ємо на $\boldsymbol{n}$ часткових сегментів за допомогою точок розподілу: $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b}$. Довжини часткових сегментів будемо позначати так: $\boldsymbol{\Delta x_1 = x_1 - x_0;\ \Delta x_2 = x_2 - x_1;\ \ldots;\ \Delta x_n = x_n - x_{n-1}}$. Через точки розподілу проведемо вертикальні прямі, внаслідок чого уся криволінійна трапеція розбивається на $\boldsymbol{n}$ часткових криволінійних трапецій. У кожному частковому сегменті довільним чином виберемо проміжні точки $\boldsymbol{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n}$. Через них також проведемо вертикальні прямі. На кожному частковому сегменті побудуємо прямокутники, основою яких є часткові сегменти, а висоти дорівнюють значенню функції у проміжних точках. Площа $\boldsymbol{k}$-го прямокутника знаходиться за формулою $\boldsymbol{f(c_k)\Delta x_k}$, де $\boldsymbol{k = 1, 2, 3, \ldots, n}$. Внаслідок такої побудови дістанемо ступінчасту фігуру, площа якої $\boldsymbol{S_n}$ знаходиться як сума площ усіх прямокутників.

$$S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\,\Delta x_n$$

або

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Площа S_n цієї ступінчастої фігури наближено дорівнює площі S криволінійної трапеції.

Будемо тепер збільшувати кількість часткових сегментів, припускаючи, що $n \to \infty$. Позначимо через $\boldsymbol{\lambda}$ довжину найбільшого часткового сегмента.

$$\lambda = \max_{1\le k\le n} \Delta x_k .$$

Якщо $\lambda \to 0$, то кількість часткових сегментів буде необмежено збільшуватись, а довжини усіх часткових сегментів будуть наближатися до нуля. Коли існує скінченна границя S площі ступінчастої фігури за умови, що $\lambda \to 0$, то ця границя вважається площею криволінійної трапеції.

$$S = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right)\Delta x_k .$$

Ця границя не повинна залежати від способу розбиття відрізка на часткові та від способу вибору проміжних точок.

Слід зауважити, що таким самим способом може бути розв'язано безліч задач геометричних, фізичних, хімічних тощо. У зв'язку з цим, розглянутий спосіб розв'язування задач виділений як математичне поняття, вже незалежне від певного геометричного чи фізичного змісту.

1.2. Поняття визначеного інтеграла

Нехай функція $f(x)$ неперервна на сегменті $[a;b]$.

1. Розіб'ємо сегмент $[a;b]$ на $\boldsymbol{n}$ часткових сегментів точками розподілу $\boldsymbol{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b}$.
2. Довжини часткових сегментів будемо позначати через $\boldsymbol{\Delta x_k}$, де $\boldsymbol{k = 1; 2; \ldots; n}$.
3. Довільним чином у кожному частковому сегменті вибираємо проміжні точки $\boldsymbol{c_1, c_2, c_3, ..., c_n}$.
4. Складаємо суму S_n, яка називається ***n*-ю інтегральною сумою**

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Припустимо, що $n \to \infty$ і при цьому $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$.

5. Розбиття сегмента $[a;\ b]$ на часткові, а також вибір проміжних точок може відбуватись тим чи іншим чином.

Якщо для кожної інтегральної суми S_n існує скінченна границя S за умови, що довжина λ найбільшого часткового сегменті наближається до нуля, то така границя називається **визначеним інтегралом Рімана** від функції $f(x)$ на сегменті $[a;\ b]$:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(c_k\right)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx . \qquad (1.1)$$

Числа $\boldsymbol{a}$ та $\boldsymbol{в}$ називаються відповідно нижньою та верхньою границями або межами інтеграла.

***Примітка**:* Якщо $\boldsymbol{f(x) = 1}$, то

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a.$$

1.3. Умови інтегровності функції

Визначення. Функція $\boldsymbol{f(x)}$, визначена на сегменті $[a;b]$, називається **інтегровною на сегменті $[a;b]$**, якщо існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

1.4. Найпростіші властивості визначеного інтеграла

Теорема 1. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми двох інтегровних функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій, тобто

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \int_a^b f_2(x)\,dx . \qquad (1.2)$$

Теорема 2. Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто,

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Теорема 3. Визначений інтеграл залежить від виду підінтегральної функції та меж інтегрування, а від того, якою буквою позначена змінна інтегрування, визначений інтеграл не залежить, тобто,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(z)\,dz. \tag{1.4}$$

Теорема 4. Якщо у визначеному інтегралі поміняти місцями межі інтегрування, то знак інтеграла зміниться на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{1.5}$$

Теорема 5. Інтеграл, межі інтегрування у якому збігаються, дорівнює нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0. \tag{1.6}$$

Теорема 6. Для будь-яких чисел ***a, b, c*** є справедливою рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{1.7}$$

1.5. Теореми про оцінку визначеного інтеграла

Теорема 1. Якщо інтегровна на сегменті $[a;b]$ функція $\boldsymbol{f(x)}$ є знакосталою на цьому сегменті, то $\int_a^b f(x)dx$ є число того самого знаку, що і $f(x)$.

Теорема 2. Якщо інтегровні на сегменті $[a;b]$ функції $\boldsymbol{f(x)}$ та $\boldsymbol{\varphi(x)}$ задовільняють умову

$$0 \le \varphi(x) \le f(x),$$

то

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx,$$

тобто нерівність можна почленно інтегрувати.

Теорема 4. Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на сегменті $[a;b]$, а $\boldsymbol{m}$ та $\boldsymbol{M}$ – відповідно її найменше та найбільше значення на сегменті $[a;b]$, то є справедливою нерівність

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a). \tag{1.9}$$

Доведення

За умовою $\boldsymbol{m} \le \boldsymbol{f(x)} \le \boldsymbol{M}$ на сегменті $[a;b]$. Відповідно до теореми 2 п. 1.4 та теореми 2 п. 1.5 маємо:

$$m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le M\int_a^b dx .$$

Зважаючи на те, що $\int_a^b dx = b-a$, маємо таку оцінку інтеграла:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Ця теорема називається **першою теоремою про середнє значення визначеного інтеграла**.

Теорема 5. Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на сегменті $[a;b]$, то на цьому сегменті існує хоч одна така точка $\boldsymbol{x = c}$, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c). \tag{1.10}$$

Доведення

З теореми 4 виходить, що

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Усі частини цієї нерівності поділимо на $b-a>0$.

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M .$$

Позначимо $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu$, де $m \le \mu \le M$.

З властивості функцій, неперервних на сегменті, виходить, що на сегменті $[a;b]$ існує хоч одна така точка $c=x$, що $\boldsymbol{f(c) = \mu}$. Значить,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c). \tag{1.11}$$

Помножимо обидві частини рівності на $b-a$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Ця теорема називається **другою теоремою про середнє значення визначеного інтеграла**.

1.7. Формула Ньютона-Лейбніца

Теорема. Якщо функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на сегменті $[a;b]$, а $\boldsymbol{F(x)}$ – одна з первісних функції $\boldsymbol{f(x)}$, то є справедливою рівність

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{1.12}$$

1.8. Методи обчислення визначеного інтеграла

1.8.1. Заміна змінної інтегрування у визначеному інтегралі

Теорема 3. Нехай функція $\boldsymbol{f(x)}$ неперервна на сегменті $[a;b]$. Якщо в інтегралі $\int_a^b f(x)dx$ покласти, що $\boldsymbol{x = \varphi(t)}$, де $\boldsymbol{\varphi(t)}$ задовольняє такі умови:

1) $\boldsymbol{\varphi(t)}$ неперервна на сегменті $[a;b]$;

2) коли $\boldsymbol{t}$ змінюється від $\boldsymbol{\alpha}$ до $\boldsymbol{\beta}$, то $\boldsymbol{\varphi(t)}$ змінюється від $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$ таким чином, що $\boldsymbol{\varphi(\alpha) = a}$, $\boldsymbol{\varphi(\beta) = b}$;
3) $\boldsymbol{\varphi(t)}$ диференційовна, а її похідна $\varphi'(t)$ неперервна на сегменті $[\alpha;\beta]$.

Тоді є справедливою формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\,. \tag{1.13}$$

Теорема 4. Якщо парна функція $\boldsymbol{f(x)}$ інтегровна на симетричному відносно початку координат проміжку $[-a;a]$, то є справедливим таке твердження

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\,. \tag{1.14}$$

Теорема 5. Якщо непарна функція $\boldsymbol{f(x)}$ інтегровна на симетричному відносно початку координат проміжку $[-a;a]$, то є справедливим таке твердження

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0. \tag{1.15}$$

1.8.2. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Теорема 6. Якщо функції $U = U(x)$ та $V = V(x)$

1) визначені та неперервні на сегменті $[a;b]$;
2) диференційовні на сегменті $[a;b]$, а їх похідні $U' = U'(x)$ та $V' = V'(x)$ є неперервними функціями на сегменті $[a;b]$, то є справедливою рівність

$$\int_a^b U(x)\,dV = U(x)\,V(x)\Big|_a^b - \int_a^b V(x)\,dU\,. \tag{1.16}$$