Практичне заняття до теми «Визначений інтеграл»

Розглянемо на конкретних прикладах, як обчислюються визначені інтеграли

Приклад 1 Обчислити інтеграл:

$$I=\int_2^3\left(5x^2-4x+11\right)dx.$$

Розв'язання

$$I=\int_2^3\left(5x^2-4x+11\right)dx=5\int_2^3 x^2dx-4\int_2^3 xdx+11\int_2^3 dx=$$

$$=\left(5\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+11x\right)\Bigg|_2^3=$$

$$=\frac{5}{3}\left(3^3-2^3\right)-2\left(3^2-2^2\right)+11(3-2)=\frac{5}{3}\cdot 19-2\cdot 5+11\cdot 1=\frac{98}{3}=32,(6).$$

Відповідь: $I=32{,}6$.

Приклад Обчислити інтеграл:

$$\int_{-2}^2\left(9x^5-3x^3+8x\right)dx.$$

Розв'язання

Під знаком інтеграла знаходиться непарна функція, а межі інтегрування симетричні відносно початку координат, отже,

$$I=\int_{-2}^2\left(9x^5-3x^3+8x\right)dx=0.$$

Відповідь: $I=0$.

Приклад Обчислити інтеграли:

$$1)\ \int_0^1(3x+1)^7dx;\ 2)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)dx;\ 3)\ \int_1^3\frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}}dx;\ 4)\ \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin\frac{x}{4}}dx.$$

Розв'язання

При обчислені цих інтегралів зручно користуватись такою властивістю невизначених інтегралів:

$$\int f(x)dx=F(x)+c\Rightarrow\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+c,$$

де a, b,c – дійсні числа.

1) $$\int_0^1(3x+1)^7dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^8}{8}\Bigg|_0^1=\frac{1}{24}\left((3\cdot 1+1)^8-(3\cdot 0+1)^8\right)=\frac{1}{24}\left(4^8-1^8\right)=\frac{65535}{24}=$$
$$=2730{,}625.$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)dx=\frac{-1}{5}\cdot\left(-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-5x\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{5}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{5\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}-0\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\frac{1}{5}\left(0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

3) $$\int_1^3\frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}}dx=\int_1^3(2x-1)^{-\frac{4}{5}}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}}\Bigg|_1^3=\frac{5}{2}\left((2\cdot 3-1)^{\frac{1}{5}}-(2\cdot 1-1)^{\frac{1}{5}}\right)=\frac{5}{2}\left(\sqrt[5]{5}-1\right).$$

4) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin\frac{x}{4}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{4}\right)}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\right|dx.$$

У процесі перетворення були використані формули зведення та формули зниження степеня:

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right); \qquad\qquad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Отже,

$$I=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\right|dx.$$

Кут $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)$ належить до I чверті і, значить, синус набуває лише додатних значень, отже,

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\right|=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right).$$

$$I=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)dx=-\sqrt{2}\cdot(-8)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=8\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{32}\right)-\cos\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=8\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{32}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=8\sqrt{2}\cos\frac{7\pi}{32}-8.$$

Приклад Обчислити інтеграли:

1) $I=\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{\ln^8 x}{x}dx$; 2) $I=\displaystyle\int_2^{\sqrt{23}}x\sqrt[3]{x^2+4}\,dx$;

3) $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x+\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}dx$; 4) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^5 x\cos x\,dx$.

Розв'язання

При розв'язанні цих прикладів будемо користуватись методом заміни змінної інтегрування. Необхідно звернути увагу на певну особливість цього методу стосовно визначеного інтеграла. Зробивши заміну змінної інтегрування, обов'язково слід знайти межі інтегрування по новій змінній.

1) $$I=\int_e^{e^2}\frac{\ln^3 x}{x}dx=\left[\begin{array}{l|c|c|}\ln x=t; & x & t\\ \hline & e^2 & 2\\ \hline \frac{1}{x}dx=dt; & e & 1\end{array}\right]=\int_1^2 t^8dt=\frac{t^9}{9}\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{1}{9}\left(2^9-1\right)=\frac{511}{9}=56,(8)$$

2) $$I=\int_2^{\sqrt{23}}x\sqrt[3]{x^2+4}\,dx=\left[\begin{array}{l|c|c|}x^2+4=t^3; & x & t\\ \hline 2xdx=3t^2dt; & \sqrt{23} & 3\\ \hline xdx=\frac{3}{2}t^2dt; & 2 & 2\end{array}\right]=\frac{3}{2}\int_2^3 t\cdot t^2dt=$$

$$I=\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^7 x}{1+x^2}dx=\left[\begin{array}{l|c|c} \operatorname{arctgx}=t; & x & t \\ \hline & 1 & \frac{\pi}{4} \\ \hline \frac{1}{1+x^2}dx=dt; & 0 & 0 \end{array}\right]=\int_0^{\frac{\pi}{4}} t^7 dt=\frac{t^8}{8}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi^8}{65536}-0\right)=\frac{1}{524288}\pi^8=0,0000019\pi^8.$$

Остаточно, I= $\frac{1}{2}\ln 2+0,0000019\cdot\pi^8$.

4) $$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 x\cos x dx=\left[\begin{array}{l|c|c} \sin x=t; & x & t \\ \hline & \frac{\pi}{6} & \frac{1}{2} \\ \hline \cos x dx=dt; & 0 & 0 \end{array}\right]=\int_0^{\frac{1}{2}} t^5 dt=$$

$$=\frac{t^6}{6}=\frac{1}{6}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^6-0\right)=\frac{1}{384}=0,00026.$$

Приклад Обчислити інтеграли:

1) $I=\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx;$ 2) $I=\int_0^{\pi} \cos^2\frac{x}{8}\sin^4\frac{x}{8}dx;$

3) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos^2 x+25\sin x\cos x+1}dx;$ 4) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4+5\cos x}dx.$

Розв'язання

1) $$I=\int_{\frac{2}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx=\left[\begin{array}{l|c|c} \frac{1}{x}=t; & \boldsymbol{x} & \boldsymbol{t} \\ \hline & \frac{3}{\pi} & \frac{\pi}{3} \\ \hline -\frac{1}{x^2}dx=dt; & \frac{2}{\pi} & \frac{\pi}{2} \end{array}\right]=$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t dt=-\sin t\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}=-(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2})=-(\frac{\sqrt{3}}{2}-1)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) $$I=\int_0^{\pi} \cos^2\frac{x}{8}\sin^4\frac{x}{8}dx=\int_0^{\pi} \cos^2\frac{x}{8}\left(\sin^2\frac{x}{8}\right)^2 dx.$$

Використовуємо формули зниження степеня:

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha); \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha).$$

$$I=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\left(1+\cos\frac{x}{4}\right)\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)^2 dx=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{x}{4}\right)\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)dx.$$

Використовуємо формулу:

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha.$$

Тоді

$$I = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \sin^2\frac{x}{4}\cdot\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}dx - \frac{1}{8}\int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}dx .$$

$$I_1 = \int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2}\pi - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$I_2 = \int_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}dx = \left[\begin{array}{l|c|c} \sin\frac{x}{4} = t; & x & t \\ & \pi & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}dx = dt; & 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} t^2 dt = \frac{4t^3}{3}\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Остаточно маємо:

$$I = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}-1\right) - \frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3+\sqrt{2}}{3}\right).$$

3) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4\cos^2 x + 25\sin x\cos x + 1}dx .$$

Підінтегральна функція це дріб, до складу якого входять тригонометричні функції, до того ж сума показників степеня при синусах та косинусах у кожному з доданків одна й та сама:

$$\cos^2 x = \cos^2 x\cdot\sin^0 x; \quad (2+0=2); \qquad \sin x\cos x = \sin^1 x\cos^1 x; \quad (1+1=2).$$

У таких випадках добре діє заміна $\mathrm{tg}x = t$. Для того, щоб її було зручно зробити, спочатку зробимо перетворення підінтегральної функції, виділяючи у знаменнику множник $\cos^2 x$.

$$\frac{1}{4\cos^2 x + 25\sin x\cos x + 1} = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\frac{4\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{25\sin x\cos x}{\cos^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{4+25\,\mathrm{tg}\,x + 1 + tg^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{tg^2 x + 25tgx + 5};$$

Була використана формула $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4\cos^2 x + 25\sin x\cos x + 1}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{tg^2 x + 25tgx + 5}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} tgx = t; \\ \dfrac{1}{\cos^2 x}dx = dt; \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline \dfrac{\pi}{4} & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 25t + 5}dt.$$

У знаменнику квадратний тричлен, де $a = 1$, $b = 25$. Робимо відповідну для цього випадку заміну: $t + \dfrac{b}{2a} = z$.

$$I = \int_0^1 \frac{1}{t^2 + 25t + 5}dt = \left[\begin{array}{l} t + \dfrac{25}{2} = z; \\ t = z - \dfrac{25}{2}; \\ dt = dz; \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline t & z \\ \hline 1 & \dfrac{27}{2} \\ \hline 0 & \dfrac{25}{2} \\ \hline \end{array} \right] =$$

$$= \int_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}} \frac{1}{z^2 - 25z + \dfrac{625}{4} + 25z - \dfrac{625}{2} + 5}dz = \int_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}} \frac{1}{z^2 - \dfrac{605}{4}}dz =$$

$$= \int_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}} \frac{1}{z^2 - \left(\sqrt{\dfrac{605}{4}}\right)^2}dz = \left(\frac{1 \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{605}} \ln\left| \frac{z - \dfrac{\sqrt{605}}{2}}{z + \dfrac{\sqrt{605}}{2}} \right| \right) \Bigg|_{\frac{25}{2}}^{\frac{27}{2}} = \frac{1}{\sqrt{605}} \left(\ln\left| \frac{\dfrac{27 - \sqrt{605}}{2}}{\dfrac{27 + \sqrt{605}}{2}} \right| - \right.$$

$$\left. - \ln\left| \frac{\dfrac{25 - \sqrt{605}}{2}}{\dfrac{25 + \sqrt{605}}{2}} \right| \right) == \frac{1}{605} \ln\left| \frac{27 - \sqrt{605}}{27 + \sqrt{605}} \cdot \frac{25 + \sqrt{605}}{25 - \sqrt{605}} \right| = \frac{1}{605} \ln \frac{183 + 7\sqrt{605}}{62} \approx$$

$$\approx 0,002 \ln 5,73 = 0,0029.$$

4) $\quad I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 + 5\cos x}dx.$

Під інтегралом знову дріб, до складу якого входять тригонометричні функції. Зробимо універсальну тригонометричну підстановку.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 + 5\cos x}dx = \left[\begin{array}{l} tg\dfrac{x}{2} = t; \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}dt; \\ \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline \dfrac{\pi}{2} & 1 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{1}{4 + \dfrac{5(1-t^2)}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}dt =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{4 + 4t^2 + 5 - 5t^2}dt = 2\int_0^1 \frac{1}{9 - t^2}dt = 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \ln\left| \frac{3 + t}{3 - t} \right| \Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{3}\ln 2.$$

Приклад Обчислити інтеграли:

1) $I=\int\limits_0^4 x\sqrt{16-x^2}\,dx;$ 2) $I=\int\limits_{\sqrt{7}}^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx;$

3) $I=\int\limits_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}\,dx,$ 4) $I=\int\limits_{\frac{4}{\sqrt{3}}}^4 \frac{\sqrt{16+x^2}}{x^2}\,dx.$

Розв'язання

1) $$I=\int\limits_0^4 x\sqrt{16-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{ll} 16-x^2=t^2; & \begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline 4 & 0 \\ \hline 0 & 4 \\ \hline\end{array} \\ -2xdx=2tdt; & \end{array}\right]=$$

$$=-\int\limits_4^0 t^2dt=-\frac{1}{3}t^3\Big|_4^0=-\frac{1}{3}(0-64)=64.$$

2) $$I=\int\limits_{\sqrt{7}}^4 \frac{\sqrt{16-x^2}}{x}\,dx=\int\limits_{\sqrt{7}}^4 \frac{x\sqrt{16-x^2}}{x^2}\,dx\left[\begin{array}{ll} 16-x^2=t^2; & \begin{array}{|c|c|}\hline x & y \\ \hline 4 & 0 \\ \hline \sqrt{7} & 3 \\ \hline\end{array} \\ -2xdx=2tdt; & \end{array}\right]=$$

$$=-\int\limits_3^0 \frac{t^2}{16-t^2}\,dt=\int\limits_3^0 \frac{-t^2}{16-t^2}\,dt=\int\limits_3^0 \frac{16-t^2-16}{16-t^2}\,dt=\int\limits_3^0 \frac{16-t^2}{16-t^2}\,dt-16\int\limits_3^0 \frac{1}{16-t^2}\,dt=$$

$$=\int\limits_3^0 dt-\left(16\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\ln\left|\frac{4-t}{4+t}\right|\right)\Big|_3^0=t\Big|_3^0-2\ln\left(\ln 1-\ln\frac{1}{7}\right)=-3-2\ln 7.$$

3) $$I=\int\limits_2^4 \frac{x\sqrt{16-x^2}}{x^2}\,dx\left[\begin{array}{ll} x=4\sin t; & \begin{array}{|c|c|}\hline x & t \\ \hline 4 & \frac{\pi}{2} \\ \hline 2 & \frac{\pi}{6} \\ \hline\end{array} \\ dx=4\cos t\,dt; & \end{array}\right]=$$

$$=-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{16(1-\sin^2 t)}}{16\sin^2 t}\cdot 4\cos t\,dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^2 t}\,dt-\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dt=$$

$$=(-\mathrm{ctg}\,t-t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\left(0+\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

4) $$I=\int\limits_0^4 \frac{\sqrt{16+x^2}}{x^2}\,dx=\left[\begin{array}{ll} x=4tgt, & \begin{array}{|c|c|}\hline x & t \\ \hline 4 & \frac{\pi}{4} \\ \hline \frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{\pi}{6} \\ \hline\end{array} \\ dx=\frac{4}{\cos^2 t}dt; & \end{array}\right]=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{16+16\,tg^2 t}}{16\,tg^2 t}\times$$

$$\times\frac{4}{\cos^2 t}\,dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{1+tg^2 t}}{tg^2 t\cdot\cos^2 t}\,dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1\cdot\cos^2 t}{\cos t\cdot\sin^2 t\cdot\cos^2 t}\,dt=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t}{\sin^2 t\cdot\cos^2 t}\,dt=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\sin^2 t\cdot(1-\sin^2 t)}dt=\left[\begin{array}{l|c|c|} & t & z \\ \sin t=z; & \frac{\pi}{4} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos t dt=dz; & \frac{\pi}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right]=$$

$$=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{z^2(1-z^2)}dz=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{z^2(1-z)(1+z)}dz.$$

Під знаком інтеграла вийшов раціональний дріб, його слід розкласти на найпростіші.

$$\frac{1}{z^2(1-z)(1+z)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{1-z}+\frac{D}{1+z}=\frac{Az(1-z^2)+B(1-z^2)+Cz^2(1+z)+Dz^2(1-z)}{z^2(1-z)(1+z)}.$$

Порівняємо чисельники.

$$1=Az(1-z^2)+B(1-z^2)+Cz^2(1+z)+Dz^2(1-z).$$

Невизначені коефіцієнти будемо шукати методом частинних значень

$$z=0\Rightarrow 1=B\Rightarrow B=1;$$

$$z=1\Rightarrow 1=2C\Rightarrow C=\frac{1}{2};$$

$$z=-1\Rightarrow 1=2D\Rightarrow D=\frac{1}{2};$$

$$z=2\Rightarrow 1=-6A-3B+12C-4D\Rightarrow 1=-6A-3+6-2\Rightarrow A=0.$$

Коефіцієнти знайдені, переходимо до інтегрування.

$$I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{z^2}dz+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-z}dz+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1+z}dz=\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\ln|1-z|+\frac{1}{2}\ln|1+z|\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=$$

$$=\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-2\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|-\ln\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\ln\left|1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right|-\ln\frac{3}{2}\right)=$$

$$=\left(2-\sqrt{2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)}\right|=$$

$$=2-\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})}\cdot\frac{2}{3}\right).$$