

## § 44. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

### 44.1. Частные производные первого порядка и их геометрическое истолкование

Пусть задана функция  $z = f(x; y)$ . Так как  $x$  и  $y$  — независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной  $x$  приращение  $\Delta x$ , сохраняя значение  $y$  неизменным. Тогда  $z$  получит приращение, которое называется *частным приращением*  $z$  по  $x$  и обозначается  $\Delta_x z$ . Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение  $z$  по  $y$ :

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Полное приращение  $\Delta z$  функции  $z$  определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Если существует предел

то он называется *частной производной* функции  $z = f(x; y)$  в точке  $M(x; y)$  по переменной  $x$  и обозначается одним из символов:

$$z'_x, \frac{\partial z}{\partial x}, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Частные производные по  $x$  в точке  $M_0(x_0; y_0)$  обычно обозначают символами  $f'_x(x_0; y_0)$ ,  $f'_x|_{M_0}$ .

Аналогично определяется и обозначается частная производная от  $z = f(x; y)$  по переменной  $y$ :

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная функций нескольких (двух, трех и больше) переменных определяется как производная функции одной из этих переменных при условии постоянства значений остальных независимых переменных. Поэтому частные производные функции  $f(x; y)$  находят по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной (при этом соответственно  $x$  или  $y$  считается постоянной величиной).

**Пример 44.1.** Найти частные производные функции

$$z = 2y + e^{x^2-y} + 1.$$

○ Решение:

$$\begin{aligned} z'_x &= (2y + e^{x^2-y} + 1)'_x = (2y)'_x + (e^{x^2-y})'_x + (1)'_x = \\ &= 0 + e^{x^2-y} \cdot (x^2 - y)'_x + 0 = e^{x^2-y} \cdot (2x - 0) = 2x \cdot e^{x^2-y}; \\ z'_y &= 2 + e^{x^2-y} \cdot (-1). \end{aligned}$$

### Геометрический смысл частных производных функции двух переменных

Графиком функции  $z = f(x; y)$  является некоторая поверхность (см. п. 12.1). График функции  $z = f(x; y_0)$  есть линия пересечения этой поверхности с плоскостью  $y = y_0$ . Исходя из геометрического смысла производной для функции одной переменной (см. п. 20.2), заключаем, что  $f'_x(x_0; y_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между осью  $Ox$  и касательной, проведенной к кривой  $z = f(x; y_0)$  в точке  $M_0(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$  (см. рис. 207).

Аналогично,  $f'_y(x_0; y_0) = \operatorname{tg} \beta$ .

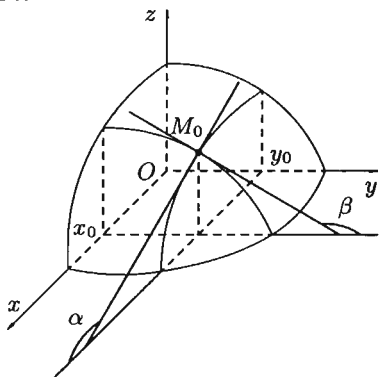


Рис. 207

## 44.2. Частные производные высших порядков

Частные производные  $\frac{\partial f(x; y)}{\partial x}$  и  $\frac{\partial f(x; y)}{\partial y}$  называют *частными производными первого порядка*. Их можно рассматривать как функции от  $(x; y) \in D$ . Эти функции могут иметь частные производные, которые называются *частными производными второго порядка*. Они определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{x^2}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{xy} = f''_{xy}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{yx} = f''_{yx}(x; y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{y^2}(x; y).$$

Аналогично определяются частные производные 3-го, 4-го и т. д. порядков. Так,  $z'''_{xxy} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} \right) = \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y \partial x^2}$  (или  $(z'''_{xyx})'_x = z^{(4)}_{xyx^2}$ ) и т. д.

⇒ Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется *смешанной частной производной*. Таковыми являются, например,  $z''_{xy}$ ,  $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ ,  $z'''_{xyx}$ .

**Пример 44.2.** Найти частные производные второго порядка функции  $z = x^4 - 2x^2y^3 + y^5 + 1$ .

○ Решение: Так как  $z'_x = 4x^3 - 4xy^3$  и  $z'_y = -6x^2y^2 + 5y^4$ , то

$$z''_{xy} = (4x^3 - 4xy^3)'_y = -12xy^2,$$

$$z''_{yx} = (-6x^2y^2 + 5y^4)'_x = -12xy^2.$$

Оказалось, что  $z''_{xy} = z''_{yx}$ .

Этот результат не случаен. Имеет место теорема, которую приведем без доказательства.

**Теорема 44.1 (Шварц).** Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для  $z = f(x; y)$  имеем:  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

### 44.3. Дифференцируемость и полный дифференциал функции

Пусть функция  $z = f(x; y)$  определена в некоторой окрестности точки  $M(x; y)$ . Составим полное приращение функции в точке  $M$ :

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

⇒ Функция  $z = f(x; y)$  называется *дифференцируемой* в точке  $M(x; y)$ , если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \quad (44.1)$$

где  $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$  и  $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ . Сумма первых двух слагаемых в равенстве (44.1) представляет собой *главную часть приращения функции*.

Главная часть приращения функции  $z = f(x; y)$ , линейная относительно  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , называется *полным дифференциалом* этой функции и обозначается символом  $dz$ :

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y. \quad (44.2)$$

Выражения  $A \cdot \Delta x$  и  $B \cdot \Delta y$  называют *частными дифференциалами*. Для независимых переменных  $x$  и  $y$  полагают  $\Delta x = dx$  и  $\Delta y = dy$ . Поэтому равенство (44.2) можно переписать в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy. \quad (44.3)$$

**Теорема 44.2 (необходимое условие дифференцируемости функции).** Если функция  $z = f(x; y)$  дифференцируема в точке  $M(x; y)$ , то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные  $\frac{\partial z}{\partial x}$  и  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , причем  $\frac{\partial z}{\partial x} = A$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = B$ .

□ Так как функция дифференцируема в точке  $M$ , то имеет место равенство (44.1). Отсюда вытекает, что  $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$ . Это означает,

что функция непрерывна в точке  $M$ . Положив  $\Delta y = 0$ ,  $\Delta x \neq 0$  в равенстве (44.1), получим:  $\Delta_x z = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ . Отсюда находим  $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$ . Переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получим  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$ ,

т. е.  $\frac{\partial z}{\partial x} = A$ . Таким образом, в точке  $M$  существует частная производная  $f'_x(x; y) = A$ . Аналогично доказывается, что в точке  $M$  существует частная производная  $f'_y(x; y) = \frac{\partial z}{\partial y} = B$ . ■

Равенство (44.1) можно записать в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \gamma, \quad (44.4)$$

где  $\gamma = \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ .

Отметим, что обратное утверждение не верно, т. е. из непрерывности функции или существования частных производных не следует дифференцируемость функции. Так, непрерывная функция  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  не дифференцируема в точке  $(0; 0)$ .

Как следствие теоремы получаем формулу для вычисления полного дифференциала. Формула (44.3) принимает вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (44.5)$$

или

$$dz = d_x z + d_y z,$$

где  $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$ ,  $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$  — частные дифференциалы функции  $z = f(x; y)$ .

**Теорема 44.3 (достаточное условие дифференцируемости функции).** Если функция  $z = f(x; y)$  имеет непрерывные частные производные  $z'_x$  и  $z'_y$  в точке  $M(x; y)$ , то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой (44.5).

Примем теорему без доказательства.

☉ Отметим, что для функции  $y = f(x)$  одной переменной существование производной  $f'(x)$  в точке является необходимым и достаточным условием ее дифференцируемости в этой точке.

Чтобы функция  $z = f(x; y)$  была дифференцируема в точке, необходимо, чтобы она имела в ней частные производные, и достаточно, чтобы она имела в точке непрерывные частные производные.

Арифметические свойства и правила исчисления дифференциалов функции одной переменной сохраняются и для дифференциалов функции двух (и большего числа) переменных.

## 44.4. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Из определения дифференциала функции  $z = f(x; y)$  следует, что при достаточно малых  $|\Delta x|$  и  $|\Delta y|$  имеет место приближенное равенство

$$\Delta z \approx dz. \quad (44.6)$$

Так как полное приращение  $\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y)$ , равенство (44.6) можно переписать в следующем виде:

$$f(x + \Delta x; y + \Delta y) \approx f(x; y) + f'_x(x; y)\Delta x + f'_y(x; y)\Delta y. \quad (44.7)$$

Формулой (44.7) пользуются в приближенных расчетах.

**Пример 44.3.** Вычислить приближенно  $1,02^{3,01}$ .

○ Решение: Рассмотрим функцию  $z = x^y$ . Тогда  $1,02^{3,01} = (x + \Delta x)^{y + \Delta y}$ , где  $x = 1$ ,  $\Delta x = 0,02$ ,  $y = 3$ ,  $\Delta y = 0,01$ . Воспользуемся формулой (44.7), предварительно найдя  $z'_x$  и  $z'_y$ :  $z'_x = (x^y)'_x = y \cdot x^{y-1}$ ,  $z'_y = (x^y)'_y = x^y \cdot \ln x$ . Следовательно,  $1,02^{3,01} \approx 1^3 + 3 \cdot 1^{3-1} \cdot 0,02 + 1^3 \cdot \ln 1 \cdot 0,01$ , т. е.  $1,02^{3,01} \approx 1,06$ .

Для сравнения: используя микрокалькулятор, находим:  
 $1,02^{3,01} \approx 1,061418168$ . ●

Отметим, что с помощью полного дифференциала можно найти: границы абсолютной и относительной погрешностей в приближенных вычислениях; приближенное значение полного приращения функции и т. д.

## 44.5. Дифференциалы высших порядков

Введем понятие дифференциала высшего порядка. Полный дифференциал функции (формула (44.5)) называют также дифференциалом первого порядка.

Пусть функция  $z = f(x; y)$  имеет непрерывные частные производные второго порядка. Дифференциал второго порядка определяется по формуле  $d^2z = d(dz)$ . Найдем его:

$$\begin{aligned} d^2z &= d\left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right) = \\ &= \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)'_x \cdot dx + \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy\right)'_y \cdot dy = \\ &= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dy\right) \cdot dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy\right) \cdot dy. \end{aligned}$$

Отсюда:  $d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$ . Символически это записывается так:

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 \cdot z.$$

Аналогично можно получить формулу для дифференциала третьего порядка:

$$d^3 z = d(d^2 z) = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 \cdot z,$$

где

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} dx^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} dy + 3 \frac{\partial}{\partial x} dx \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3} dy^3.$$

Методом математической индукции можно показать, что

$$d^n z = \left( \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n \cdot z, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что полученные формулы справедливы лишь в случае, когда переменные  $x$  и  $y$  функции  $z = f(x; y)$  являются независимыми.

**Пример 44.4.** (Для самостоятельного решения.) Найти  $d^2 z$ , если  $z = x^3 y^2$ .

Ответ:  $d^2 z = 6xy^2 dx^2 + 12x^2 y dx dy + 2x^3 dy^2$ .