Лекція 8.05.2020

Застосування степеневих рядів

1. Наближене обчислення значень функції

Нехай функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд і значення x_0 належить інтервалу збіжності ряду. Точне значення функції $f(x_0)$в точці x_0 дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене — частковій сумі $S_n(x_0)$.

Похибку наближення $|f(x_0) - S_n(x_0)|$ можна знайти, оцінюючи залишок ряду $R_n(x_0)$.

Для знакопочережних рядів $|R_n(x_0)| \le |a_{n-1}(x_0)|$, де $a_{n-1}(x_0)$, — перший з відкинутих членів ряду. В усіх інших випадках величину $R_n(x_0)$, як правило, оцінюють так:

$$|R_n(x_0)| \le |a_{n+1}(x_0)| + |a_{n+2}(x_0)| + \cdots < a_1 + a_2 + \cdots = S,$$

де $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – де додатний збіжний ряд, суму S якого можна обчислити.

Приклад 1. Обчислити sin1 з точністю до $3 \cdot 10^{-3}$.

Розв'язання. Покладемо в формулі

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$x = 1.$

$$\sin 1 = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} + \cdots$$

Оскільки

$$|a_4| = \frac{1}{7} = \frac{1}{5040} \approx 0{,}0002 < 0{,}001,$$

то за теоремою Лейбніца залишок $R_3(1)$ ряду, який починається з члена a_4, не перевищує 0,001. Отже,

$$sin\, 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \approx 0{,}842.$$

2. Обчислення похідної функції

Приклад 2. Користуючись розвиненням функції $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ в ряд Маклорена, обчислити значення $f^{(10)}(0)$.

Розв'язання. Застосуємо розвинення в ряд функції e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + .$$

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} - \cdots + \frac{x^{10}}{2^5 5!} + \cdots, \quad x \in R.$$

В наведеному розвиненні коефіцієнт при x^{10} дорівнює

$$\frac{f^{(10)}(0)}{10!}.$$

Отже, маємо $f^{(10)}(0) = -\frac{1}{2^5 \cdot 5!} 10! = -945.$

3. Наближене обчислення визначених інтегралів

Якщо в визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)\,dx$ підінтегральну функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд і відрізок [a, b] міститься в інтервалі збіжності ряду, то почленно інтегруючи ряд і обмежуючись скінченною кількістю його членів, обчислюють інтеграл з наперед заданою точністю.

Приклад 3. При вивченні теорії ймовірностей важливу роль відіграє функція

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

яку називають функцією Лапласа або інтегралом ймовірностей. Як відомо, $\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, не виражається через елементарні функції. Розвинемо підінтегральну функцію в ряд , застосовуючи розвинення

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} - \frac{x^6}{2^3 3!} + \cdots, \quad x \in R.$$

Тоді для функції $\Phi(x)$ дістанемо розвинення в збіжний на всій дійсній осі ряд:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 2^3 \cdot 3!} + \ldots \right)$$

або

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1) 2^n n!}.$$

Приклад 4. Обчислити еліптичний інтеграл, застосовуючи розвинення підінтегральної функції в степеневий ряд.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Розв’язання.

❍Розглядаємо підінтегральну функцію як частковий випадок біноміального ряду, $x=-k^2\sin^2\varphi$) :

$$\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi+\frac{3!!}{4!!}k^4\sin^4\varphi+\frac{5!!}{6!!}k^6\sin^6\varphi+\dots.$$

Оскільки $k^2\sin^2\varphi\le k^2$, то цей ряд збігається рівномірно для всіх значень φ, і його можна почленно інтегрувати:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi+\frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi+\frac{3!!}{4!!}k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi d\varphi+$$

$$+\frac{5!!}{6!!}k^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi d\varphi+\dots=\frac{\pi}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{3}{8}\right)^2k^4+\left(\frac{15}{48}\right)^2k^6+\dots\right).$$

Кількість членів ряду залежить від необхідної точності обчислення. ●

4. Інтегрування диференціальних рівнянь

Якщо розв’язки диференціального рівняння в елементарних функціях знайти неможливо, тоді розв’язок (загальний або частинний) диференціального рівняння можна знаходити у вигляді степеневого ряду.

Для обчислення коефіцієнтів в розвиненні частинного розв’язку диференціального рівняння, що задовольняє задані початкові умови, в степеневий ряд застосовують метод **послідовного диференціювання**.

Нехай, наприклад, потрібно знайти розв’язок задачі Коші для диференціального рівняння $y''=f(x,y,y')$, $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0$. Якщо в околі точки $(x_0;y_0;y'_0)$ виконуються умови теореми існування та єдиності розв’язку задачі Коші, тоді частинний розв’язок можна спробувати шукати у вигляді ряду Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

Перші два коефіцієнти ряду визначають з початкових умов, інші коефіцієнти знаходять послідовним диференціюванням рівняння і обчисленням значень похідних в точці x_0. Даний метод можна застосовувати для рівняння довільного порядку. Але метод послідовного диференціювання не дозволяє , як правило, знайти аналітичний вираз загального члена ряду, тому дослідити на збіжність його неможливо.

Приклад 5. Знайти перші чотири ненульові члени розвинення в степеневий ряд розв'язку задачі Коші:

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots .$$

Розв'язання.

❍ Точка $y = 1$ не є особливою точкою для даного рівняння, тому його розв'язок можна шукати у вигляді ряду:

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots .$$

Початкові умови задають значення коефіцієнтів ряду $y(1), y'(1)$. З рівняння знаходимо: $y''(1) = 1$. Диференціюючи обидві частини рівняння, дістанемо:

$$y''' = \cos y' - x\sin y' \cdot y'', \; y'''(1) = 1,$$

$$y^{(4)} = -y''\sin y' \sin y' - y''\sin y' - xy'''\sin y' - x(y'')^2\cos y',$$

$$y^{(4)}(1) = -1.$$

Підставимо знайдені значення в ряд:

$$y(x) = 2 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{24}(x-1)^4 + \dots \bullet$$

При інтегруванні диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів для обчислення коефіцієнтів степеневого ряду застосовують ще метод невизначених коефіцієнтів.

Метод невизначених коефіцієнтів

Якщо диференціальне рівняння лінійне відносно функції у і її похідних, то розв'язок рівняння шукаємо у вигляді степеневого ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

коефіцієнти якого необхідно знайти. Розглянемо метод невизначених коефіцієнтів на прикладі.

Приклад 6. Знайдемо розв’язок задачі Коші:

$$y'' + y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Розв’язання.

❍Розв’язок диференціального рівняння шукаємо у вигляді степеневого ряду з невизначеними коефіцієнтами:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots .$$

Двічі диференціюємо цей ряд:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 \dots,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + \dots$$

Підставимо ряди для y, y'' в рівняння:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Звідси, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо рекурентне співвідношення для знаходження коефіцієнтів ряду:

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} = -a_n .$$

З початкових умов знаходимо:

$$a_0 = y(0) = 0, a_1 = y'(0) = 1 .$$

Обчислюємо інші коефіцієнти:

$$a_2 = a_4 = a_6 = \dots = a_{2n} = \dots = 0,$$

$$a_3 = -\frac{1}{3!}, a_5 = \frac{1}{5!}, \dots, a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, \dots .$$

Отже, розв’язок задачі Коші має вигляд

$$y(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots = \sin x . \bullet$$

Завдання для самостійного розв'язання

6. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислить указанный определенный интеграл с точностью до 0,001.

6.1. $\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})dx$. (*Ответ:* 0,070.)

6.2. $\int_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$. (*Ответ:* 0,162.)

6.3. $\int_0^{0,2} \sqrt{x}e^{-x}dx$. (*Ответ:* 0,054.)

6.4. $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$. (*Ответ:* 0,487.)

7. Найти разложение в степенной ряд по степеням x решения дифференциального уравнения (записать три первых, отличных от нуля, члена этого разложения).

7.1. $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$. $\left(\textit{Ответ: } y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots\right)$

7.2. $y' = x^2y^2 + 1$, $y(0) = 1$. $\left(\textit{Ответ: } y = 1 - x + \frac{1}{3}x^3 + \ldots\right)$

7.3. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots\right)$

7.4. $y' = x^3 + y^2$, $y(0) = \frac{1}{2}$. $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \ldots\right)$

8. Методом последовательного дифференцирования найти первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения при указанных начальных условиях.

8.1. $y' = \arcsin y + x, y(0) = \frac{1}{2}, k = 4.$ $\left(\textit{Ответ: } y = \frac{1}{2} + \frac{\pi x}{6} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\pi}{3\sqrt{x}}\right)x^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{9} + \frac{\pi^2}{27\sqrt{3}}\right) x^3 + \ldots\right)$

8.7. $y''' = y'' + y'^2 + y^3 + x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 0{,}5,\ \ k = 6.$ $\left(\textit{Ответ: } \ y = 1 + 2x + \frac{x^2}{4} + \frac{11}{12}x^3 + \frac{29}{48}x^4 + \frac{25}{48}x^5 + \ldots\right)$

8.8. $y' = x^2 - xy,\ y(0) = 0{,}1,\ k = 3.$ ($\textit{Ответ: }\ y = 0{,}1 - 0{,}05x^2 + 0{,}333x^3 + \ldots$)

8.9. $y'' = 2yy', y(0) = 0, y'(0) = 1, k = 3.$ $\left(\textit{Ответ: } y = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{12x^5}{5!} + \ldots\right)$