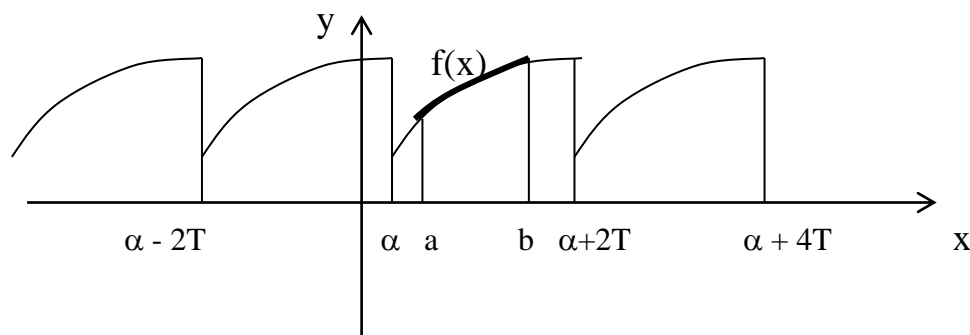


ЛЕКЦИЯ. РОЗКЛАДАННЯ НЕПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ В РЯД ФУР'Є; ІНТЕГРАЛ ФУР'Є.

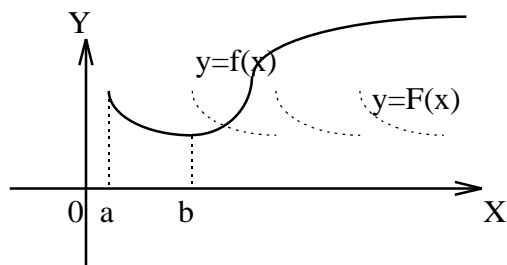
#1 Периодическое продолжение и разложение в ряд Фурье неперiodической функции

Задача разложения неперiodической функции в ряд Фурье в принципе не отличается от разложения в ряд Фурье периодической функции.

Допустим, функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$ и является на этом отрезке кусочно – монотонной. Рассмотрим произвольную периодическую кусочно – монотонную функцию $f_1(x)$ с периодом $2T \geq |b-a|$, совпадающую с функцией $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.



Пусть неперiodическая функция $f(x)$, график которой приведен на рис. сплошной линией, интересует нас лишь на интервале (a, b) .



Построим периодическую функцию $F(x)$ с периодом $T \geq b-a$, совпадающую с $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Геометрически для этого нужно выполнить переносы графика функции $f(x)$ параллельно оси Ox вправо и влево на расстояния $T, 2T, \dots, nT, \dots$ (рис). Этот процесс называется *периодическим продолжением функции $f(x)$* за пределы отрезка $a \leq x \leq a + T = b$ с периодом $T=b-a$; $l = \frac{b-a}{2}$.

Если $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то и $F(x)$ им тоже удовлетворяет и, следовательно, может быть представлена в виде ряда Фурье. Ввиду совпадения $f(x)$ и $F(x)$ на $[a, b]$, полученный ряд и будет рядом Фурье неперiodической функции $f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

В точках непрерывности функции $F(x)$ имеем

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l F(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_a^b f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx (k=1,2,\dots), l = \frac{b-a}{2},$$

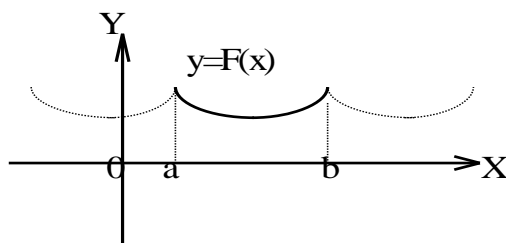
$$f(x)_{(a,b)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

При этом, если $f(a)=f(b)$, на концах интервала (a,b) периодически продолженная функция $F(x)$ разрывов не имеет (рис).

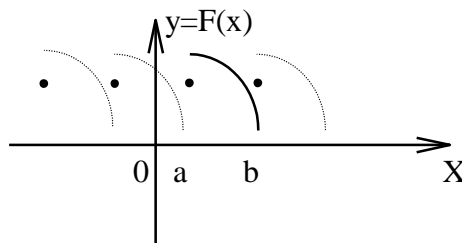
В точках разрыва $f(x)$ внутри интервала (a,b) и на концах интервала (если $f(a) \neq f(b)$) сумма ряда равна полусумме односторонних пределов функции $f(x)$, т.е.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}; \text{ при } x \in (a,b)$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \frac{f(a+0) + f(b-0)}{2}; \text{ при } x=a; x=b. \left(l = \frac{b-a}{2} \right).$$



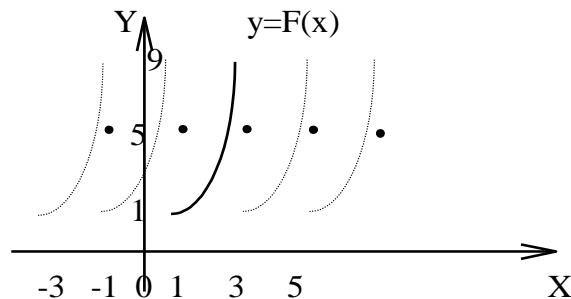
Если $f(a) \neq f(b)$, на концах интервала (a,b) имеем разрывы 1-го рода; так как функция $F(x)$ периодическая, за ее значения в точках разрыва a и b можно взять одинаковые значения, равные среднему арифметическому предельных значений $\frac{1}{2}(f(a+0) + f(b-0))$, что совпадает с суммой ряда Фурье (рис).



Полагая также в точках разрыва $f(x)$ значение функции равным среднему арифметическому предельных значений $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, получаем, что

периодическая функция $F(x)$ есть сумма ряда Фурье, совпадающая с $f(x)$ на $[a,b]$. График суммы ряда Фурье есть совокупность кривых и изолированных точек.

Пример 1. Представить $f(x) = x^2$ рядом Фурье в $(1;3)$. (рис)



Период $T=2l=3-1=2$, $l=1$; в точках разрыва $x=2k+1$, ($k=0,1,2,\dots$) сумма тригонометрического ряда равна $\frac{1}{2}(1^2 + 3^2)=5$, что можно принять и в качестве значений функции $F(x)$.

Находим $a_k = \int_1^3 f(x) \cos k\pi x dx =$

$$= \int_1^3 x^2 \cos k\pi x dx = \left. \begin{array}{l} u = x^2 \quad du = 2x dx \\ dv = \cos k\pi x \\ v = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \end{array} \right| = \frac{x^2 \sin k\pi x}{k\pi} \Big|_1^3 - \int_1^3 \frac{\sin k\pi x}{k\pi} 2x dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} u = x \quad du = dx \\ dv = \sin k\pi x \\ v = -\frac{\cos k\pi x}{k\pi} \end{array} \right| = \frac{2x \cos k\pi x}{(k\pi)^2} \Big|_1^3 + \frac{2}{(k\pi)^2} \int_1^3 \cos k\pi x dx = \frac{2}{(k\pi)^2} (3 \cos k\pi \cdot 3 -$$

$$- \cos k\pi) = \frac{4(-1)^k}{k^2 \pi^2}, \text{ где } \sin 3k\pi = \sin k\pi = 0; \quad \cos k\pi = \cos 3k\pi = (-1)^k,$$

$$\int_1^3 \cos k\pi x dx = 0; \quad a_0 = \int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}.$$

Аналогично вычисляются коэффициенты

$$b_k = \int_1^3 f(x) \sin k\pi x dx = 8 \frac{(-1)^k}{k\pi}.$$

Получим разложение в ряд Фурье

$$x^2 \underset{(1;3)}{=} \frac{13}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{\cos k\pi x}{k^2 \pi^2} - 2 \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \right).$$

Воспользовавшись значением суммы $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, получим, например, при

$x=1$ сумму ряда Фурье, равную 5:

$$S(1) = \frac{13}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cos k\pi}{k^2 \pi^2} = \frac{13}{3} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{13}{3} + \frac{2}{3} = 5,$$

что совпадает со средним арифметическим односторонних пределов $\frac{1}{2} \left(x^2 \Big|_{x=1} + x^2 \Big|_{x=3} \right) = \frac{1}{2} (1 + 9) = 5$.

Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[0, l]$

При практическом использовании рядов Фурье в качестве промежутка, на котором нас интересует поведение функции, удобно взять $[0, l]$, т.е. $a=0$, $b=l$. Поставим задачу построения ряда Фурье для функции, заданной на $[0, l]$.

Вне отрезка $[0, l]$ поведение функции для нас безразлично. Таким образом, промежуток $[0, l]$ можно считать периодом, однако в этом случае необходимо вычислять коэффициенты a_k и b_k , т.е. строить полный ряд Фурье.

Задачу разложения в ряд Фурье можно решить таким образом: выберем произвольную функцию на отрезке $[-l, 0]$ и определим на всем отрезке $[-l, l]$ некоторую функцию

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, l] \\ g(x), & x \in [-l, 0] \end{cases}$$

Функция $F(x)$ определена в интервале длины $2l$; разлагается в свой ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$, за исключением быть может точек $x = \pm l, x = 0$ и точек разрыва функций $f(x)$ и $g(x)$.

Однако, предпочтение отдается чаще всего четному либо нечетному продолжению функции на промежуток $[-l, 0)$, при которых получается разложение в неполный ряд Фурье:

а) Продолжим функцию четным образом на промежуток $[-l, 0)$, полагая (рис)

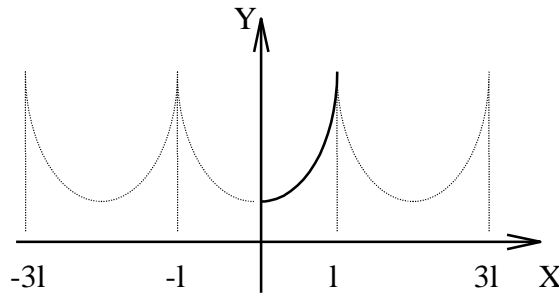
$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, l] \\ f(-x), & x \in [-l, 0) \end{cases}$$

тогда $b_k = 0$ ($k=1, 2, \dots$)

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k=0,1,2,\dots)$$

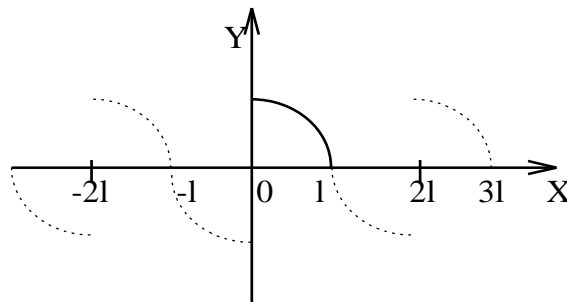
$$f(x) \underset{[0,l]}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

При $x=0$ и $x=l$ данный ряд сходится соответственно к $f(0+0)$ и к $f(l-0)$.



б) При нечетном продолжении (рис) полагаем

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, l] \\ -f(-x), & x \in [-l, 0) \end{cases}$$



тогда $a_k = 0$ ($k=0,1,2,\dots$)

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k=1,2,\dots)$$

При нечетном продолжении в точках $x=0$ и $x=l$ сумма тригонометрического ряда равна 0 и сам ряд имеет вид

$$f(x) \underset{[0,l]}{=} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Отметим, что при различных аналитических выражениях функции $f_1(x)$ на

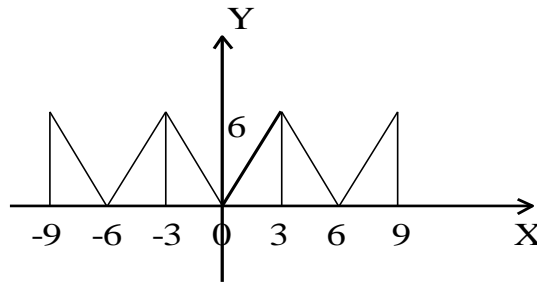
$[-l, 0)$, на промежутке $(0, l)$ мы получаем различные аналитические представления одной и той же функции $f(x)$, или в виде ряда косинусов, или в виде ряда синусов, или в виде полного ряда Фурье.

Теорема. Функцию $f(x)$, заданную и дифференцируемую на $(0, l)$, можно

бесконечным множеством способов разложить в тригонометрический ряд.

Возможность выбора продолжения функции позволяет, например, построить ряд, в котором амплитуды гармоник убывают быстрее, или ряд, коэффициенты которого вычисляются проще.

Пример 2. Разложить по косинусам функцию $f(x) = 2x$, заданную на $[0,3]$ (рис).



На промежутке $[-3,0]$ функция продолжается чётно, значит, $b_k = 0$ ($k=1,2,\dots$), $l=3$, период $T=6$. Имеем

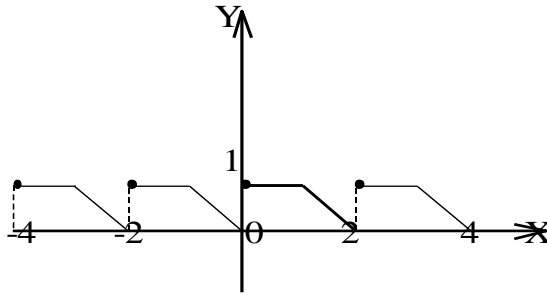
$$a_0 = \frac{2}{3} \int_0^3 2x dx = \frac{2}{3} x^2 \Big|_0^3 = 6; \quad \frac{a_0}{2} = 3.$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{3} \int_0^3 2x \cos \frac{k\pi x}{3} dx = \frac{3 \cdot 4}{k\pi \cdot 3} \int_0^3 x d(\sin \frac{k\pi x}{3}) = \\ &= \frac{4}{k\pi} \left(x \sin \frac{k\pi x}{3} \Big|_0^3 - \int_0^3 \sin \frac{k\pi x}{3} dx \right) = \frac{4}{k\pi} \frac{3}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{3} \Big|_0^3 = \frac{12}{k^2 \pi^2} (\cos k\pi - 1) = \\ &= \frac{12}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x \Big|_{[0;3]} &= 3 + \frac{12}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} ((-1)^k - 1) \frac{1}{k^2} \cos \frac{k\pi x}{3} = 3 + \frac{12}{\pi^2} \left(-2 \cos \frac{\pi x}{3} - \frac{2}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{3} - \right. \\ &\left. - \frac{2}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{3} - \dots - \frac{2}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi x}{3} - \dots \right) = 3 - \frac{24}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi x/3}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

Пример 3. Разложить в ряд Фурье функцию (рис)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1] \\ 2-x, & x \in [1;2] \end{cases}$$



Имеем $l=1$, $T=2l=2$.

$$a_0 = \int_0^1 dx + \int_1^2 (2-x) dx = x \Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^2 = 1 + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$a_k = \int_0^1 \cos k\pi x dx - \int_1^2 (x-2) \cos k\pi x dx = \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_1^2 (x-2) d(\sin k\pi x)$$

$$= -\frac{1}{k\pi} \left((x-2) \sin k\pi x \Big|_1^2 - \int_1^2 \sin k\pi x dx \right) = \frac{-1}{(k\pi)^2} (1 - \cos k\pi) = \frac{((-1)^k - 1)}{k^2 \pi^2}$$

$$b_k = \int_0^1 \sin k\pi x dx - \int_1^2 (x-2) \sin k\pi x dx = \frac{-1}{k\pi} \int_0^1 d(\cos k\pi x) +$$

$$+ \frac{1}{k\pi} \int_1^2 (x-2) d(\cos k\pi x) = \frac{-1}{k\pi} \cos k\pi x \Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi} \left((x-2) \cos k\pi x \Big|_1^2 - \int_1^2 \cos k\pi x dx \right)$$

$$= \frac{-1}{k\pi} (\cos k\pi - 1) + \frac{1}{k\pi} (\cos k\pi) = \frac{1}{k\pi}, \text{ где } \int_1^2 \cos k\pi x dx = 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((-1)^k - 1) \cos k\pi x}{k^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\pi x}{k}, & x \in (0; 2) \\ \frac{1}{2}, & x = 0; x = 2. \end{cases}$$

Комплексная форма ряда Фурье

Пусть $f(x)$ -периодическая функция периода $T=2\pi$, удовлетворяющая условиям разложимости в ряд Фурье, тогда ряд Фурье может быть записан в комплексной форме

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}, c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Комплексная форма ряда Фурье функции $f(x)$ периода $T=2l$ имеет вид:

$$\boxed{\phantom{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{inx}, c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)}}$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{in\pi x/l}, c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-in\pi x/l} dx \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Пример 4. Представить комплексной формой ряда Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x \leq 0 \\ e^{-x}, & 0 < x < \pi \end{cases}.$$

Находим коэффициенты ряда Фурье

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-x} \cdot e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-x(1+in)} dx = \\ &= -\frac{1}{2\pi(1+in)} e^{-x(1+in)} \Big|_0^{\pi} = \frac{-1}{2\pi(1+in)} (e^{-\pi(1+in)} - 1) = \frac{(1-in)(1-e^{-\pi} \cdot e^{-\pi in})}{2\pi(1+in)(1-in)} = \\ &= \frac{1-in}{2\pi(1+n^2)} (1-e^{-\pi} \cdot e^{-\pi in}) = \frac{1-in}{2\pi(1+n^2)} (1-(-1)^n e^{-\pi}), \end{aligned}$$

где $e^{-\pi in} = \cos \pi n - i \sin \pi n = (-1)^n$. Получим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1-in}{1+n^2} (1-(-1)^n e^{-\pi}) e^{inx}.$$

#2 Интеграл Фурье

Пусть функция $f(x)$ на каждом отрезке $[-l, l]$, где l – любое число, кусочно – гладкая или кусочно – монотонная и на каждом отрезке удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, кроме того, $f(x)$ – абсолютно интегрируемая функция, т.е. сходится несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$$

Тогда функция $f(x)$ разлагается в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n}{l} x + b_n \sin \frac{\pi n}{l} x \right)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n}{l} t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n}{l} t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если подставить коэффициенты в формулу для $f(x)$, получим:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n}{l} t dt \cos \frac{\pi n}{l} x + \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{\pi n}{l} t dt \sin \frac{\pi n}{l} x \right) =$$

$$= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n}{l} (t-x) dt$$

Переходя к пределу при $l \rightarrow \infty$, можно доказать, что $\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt = 0$ и

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{\pi n}{l} (t-x) dt$$

При разложении периодической функции в ряд Фурье частоты гармоник обозначим $u_n = \frac{\pi n}{l}$, которые отличаются между собой на постоянное число

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n = \frac{\pi}{l} \quad \text{или} \quad \frac{1}{l} = \frac{\Delta u_n}{\pi};$$

каждая из указанных гармоник имеет свою амплитуду. При этом периодические функции имели дискретный спектр, т.е. представлялись в виде отдельных гармоник.

При $l \rightarrow \infty$ $\Delta u_n \rightarrow 0$.

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta u_n \int_{-l}^l f(t) \cos u_n (t-x) dt$$

Можно доказать, что предел суммы, стоящий в правой части равенства равен интегралу

$$\int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) dt$$

Тогда

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(t-x) dt - \text{двойной интеграл Фурье.}$$

В точках разрыва $f(x)$ заменяется суммой $\frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$.

Окончательно получаем:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (a(u) \cos ux + b(u) \sin ux) du, \text{ где}$$

$$a(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ut dt$$

$$b(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ut dt$$

Формулы называются представлением функции $f(x)$ *интегралом Фурье*.

В формуле

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (a(u) \cos ux + b(u) \sin ux) du$$

имеем разложение функции $f(x)$ в бесконечном промежутке $(-\infty; +\infty)$ на гармоники, частоты которых u непрерывно меняются от 0 до ∞ .

Непериодическая функция имеет непрерывный спектр; частоты образующих ее гармоник изменяются непрерывно. Функции $a(u)$ и $b(u)$ определяют распределение амплитуд в зависимости от частоты u .

Если функция $f(x)$ *четная* и удовлетворяет условиям представимости ее интегралом Фурье, то по свойству интегралов по симметричному относительно начала координат промежутку

$$a(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \cos ut dt, \quad b(u) = 0.$$

Интеграл Фурье четной функции имеет вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(u) \cos ux du.$$

Для *нечетной* функции, удовлетворяющей условиям представимости интегралом Фурье, получим

$$b(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut dt, \quad a(u) = 0.$$

Следовательно, *интеграл Фурье нечетной функции* имеет вид

$$f(x) = \int_0^{\infty} b(u) \sin ux du.$$

Преобразование Фурье

Пусть функция $f(x)$ имеет на каждом конечном интервале конечное число точек разрыва 1-го рода и абсолютно интегрируема на всей числовой оси, тогда

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u) e^{iux} du, \quad \text{где}$$
$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iut} dt,$$

Выражение $f(x)$ называют *комплексной формой интеграла Фурье*.

Подстановка $F(u)$ в $f(x)$ приводит к двойному интегралу Фурье в комплексной форме

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iu(x-t)} dt,$$

Функцию $F(u)$ называют *преобразованием Фурье* функции $f(x)$ или *спектральной плотностью*.

Функция $f(x)$, представимая интегралом Фурье, называется *обратным преобразованием Фурье*.

Интегралы $F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos ux dx$ и $F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin ux dx$ называются соответственно *косинус - преобразование Фурье* и *синус - преобразование Фурье*.

Косинус - преобразование Фурье будет преобразованием Фурье для четных функций, синус - преобразование - для нечетных.

Пример 1. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

Функция $e^{-x} \leq 1$ при $x \geq 0$, т.е. является ограниченной; кроме того,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Значит $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos u(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-t} \cos u(t-x) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_0^{\infty} e^{-t} \cos u(x-t) dt. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} e^{-t} \cos u(x-t) dt = \left. \begin{array}{l} u = e^{-t} \quad du = -e^{-t} dt \\ dv = \cos u(x-t) dt \\ v = -\frac{1}{u} \sin u(x-t) \end{array} \right| = -\frac{1}{u} e^{-t} \sin u(x-t) \Big|_0^{+\infty} - \\ &= -\frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin u(x-t) dt = \frac{1}{u} \sin ux - \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin u(x-t) dt = \end{aligned}$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = e^{-t} \quad du = -e^{-t} dt \\ dv = \sin u(x-t) dt \\ v = \frac{1}{u} \cos u(x-t) \end{array} \right| = \frac{\sin ux}{u} - \frac{e^{-t}}{u^2} \cos u(x-t) \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{u^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos u(x-t) dt;$$

$$\frac{1+u^2}{u^2} \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos u(x-t) dt = \frac{\sin ux}{u} + \frac{\cos ux}{u^2}; \quad \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos u(x-t) dt = \frac{u \sin ux + \cos ux}{1+u^2}$$

Значит,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{u \sin ux + \cos ux}{1+u^2} du.$$

Полагая, например, $x=0$, найдем

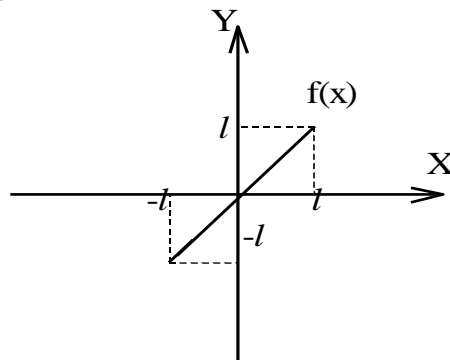
$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} u \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{т.е. правая часть выражения равна}$$

среднему арифметическому односторонних пределов $\frac{e^0 + 0}{2} = \frac{1}{2}$

$$\text{При } x=1: \text{ т.к. } e^{-1} = \frac{1}{e}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{u \sin u - \cos u}{2} du = \frac{1}{e}.$$

Пример 2. Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq l \\ 0, & |x| > l \end{cases}$ график

функции приведен на рис.



Функция $f(x)$ ограничена и абсолютно интегрируема; удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, нечетная. По формуле находим

$$b(u) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(t) \sin ut dt = \frac{2}{\pi} \int_0^l t \sin ut dt.$$

Интегрируя по частям, имеем: $u_1 = t, du_1 = dt, dv_1 = \sin ut dt, v_1 = -\frac{\cos ut}{u}$, что

$$\begin{aligned} \text{дает } b(u) &= \frac{2}{\pi} \left(t \left(-\frac{\cos ut}{u} \right) \Big|_0^l + \frac{1}{u} \int_0^l \cos ut dt \right) = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{l}{u} \cos ul + \frac{\sin ul}{u^2} \Big|_0^l \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{l \cos ul}{u} + \frac{\sin ul}{u^2} \right). \text{ Значит, } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-ul \cos ul + \sin ul}{u^2} \sin ux du. \end{aligned}$$

Пример 3. Представить интегралом Фурье в комплексной форме функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

По формуле, вычисляя сначала внутренний интеграл, находим

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l e^{iu(x-t)} dt &= -\frac{1}{iu} e^{iu(x-t)} \Big|_{-l}^l = -\frac{1}{iu} (e^{iu(x-l)} - e^{iu(x+l)}) = \frac{e^{iux}}{u} \frac{e^{iul} - e^{-iul}}{i} = \\ &= \frac{e^{iux}}{u} 2 \sin ul; \text{ таким образом } f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ul}{u} e^{iux} du. \end{aligned}$$