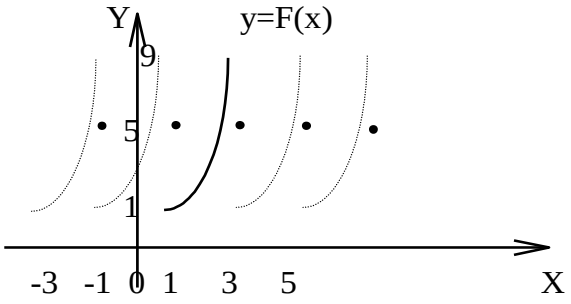
ПЕРІОДИЧНЕ ПОДОВЖЕННЯ І РОЗКЛАДАННЯ В РЯД ФУР'Є ПЕРІОДИЧНОЇ ФУНКЦІЇ.

Примеры #1. Представить $f(x) = x^2$ рядом Фурье в (1;3).



Порядок решения:

Очевидно, *f(x)* дифференцируема на (1;3) тогда продолжаем функцию периодически на всю числовую ось.

1. Задать период периодической функции *F*(*x*), составленной из непериодической *f*(*x*): T=2 *l* =3-1=2, тогда определим $l = \frac{3-1}{2}$=1;

2. В точках разрыва функции x=2k+1, (k=0,1,2,...) в качестве значений функции *F*(*x*) можно принять значение равное $\frac{1}{2}(1^2 + 3^2)$=5.

3. *F*(*x*) удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, находим коэффициенты ряда Фурье:

Находим $a_k = \int_1^3 f(x)\cos k\pi x\,dx =$

$$= \int_1^3 x^2 \cos k\pi x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = \cos k\pi x\,dx & \\ v = \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x & \end{array} \right| = \left.\frac{x^2 \sin k\pi x}{k\pi}\right|_1^3 - \int_1^3 \frac{\sin k\pi x}{k\pi} 2x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sin k\pi x\,dx & \\ v = -\frac{\cos k\pi x}{k\pi} & \end{array} \right| = \left.\frac{2x\cos k\pi x}{(k\pi)^2}\right|_1^3 + \frac{2}{(k\pi)^2}\int_1^3 \cos k\pi x\,dx = \frac{2}{(k\pi)^2}(3\cos k\pi \cdot 3 -$$

$$-\cos k\pi) = \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}, \text{где } \sin 3k\pi = \sin k\pi = 0; \quad \cos k\pi = \cos 3k\pi = (-1)^k,$$

$$\int_1^3 \cos k\pi x\,dx = 0; \quad a_0 = \int_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}.$$

Аналогично вычисляются коэффициенты

$$b_k = \int_1^3 f(x)\sin k\pi x\,dx = 8\frac{(-1)^k}{k\pi}.$$

Получим разложение в ряд Фурье

$$x^2 \underset{(1;3)}{=} \frac{13}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2} - 2\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right).$$

4. Воспользовавшись значением суммы $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, получим, например, при x=1 сумму ряда Фурье, равную 5:

$$S(1) = \frac{13}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos k\pi}{k^2\pi^2} = \frac{13}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{13}{3} + \frac{2}{3} = 5,$$

что совпадает со средним арифметическим односторонних пределов $\frac{1}{2}\left(x^2\Big|_{x=1} + x^2\Big|_{x=3}\right) = \frac{1}{2}(1+9) = 5.$

Пример #2. Разложить функцию $f(x) = x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$. Построить график $f(x) = x+1$, график суммы ряда $S(x)$ и частичной суммы $S_2(x)$.

Решение: Начало стандартное, записываем, что период разложения $T = 2\pi$ и полупериод, т. е. $l = \pi$. Тогда разложие функции $f(x) = x+1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

Найдём коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi - \left(\frac{(-\pi)^2}{2} - \pi\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi - \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi\right)\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} + \pi - \frac{\pi^2}{2} + \pi\right) = \frac{1}{\pi}\cdot 2\pi = 2$$

Используем формулунаходим,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\cos nx\,dx = (*)$$

Данный интеграл берётся он по частям:

$$u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos nx dx \Rightarrow v = \int \cos nx dx = \frac{1}{n}\int \cos nx d(nx) = \frac{1}{n}\sin\ nx$$, т. е.

$$(*) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}(x+1)\sin\ nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin\ nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot\left[(\pi+1)\sin\pi n - (-\pi+1)\sin(-\pi n)\right] - \frac{1}{n}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot(0-0) + \frac{1}{n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}(\cos\pi n - \cos(-\pi n))\right) = \frac{1}{\pi n^2}(\cos\pi n - \cos\pi n) = 0$$

Ищем коэффициент Фурье b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\ nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+1)\sin\ nx dx = (*)$$

тоже интегрируется по частям:

$$u = x+1 \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin\ nx dx \Rightarrow v = \int \sin\ nx dx = \frac{1}{n}\int \sin\ nx d(nx) = -\frac{1}{n}\cos nx$$

далее:

$$(*) \overset{(1)}{=} \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}(x+1)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right) \overset{(2)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)\cos\pi n - (-\pi+1)\cos(-\pi n)\right] + \frac{1}{\pi n}\cdot\frac{1}{n}(\sin\ nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} \overset{(3)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(\pi+1)(-1)^n - (-\pi+1)(-1)^n\right] + \frac{1}{\pi n^2}\cdot(\sin\pi n - \sin(-\pi n)) \overset{(4)}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi n}\cdot\left[\pi+1+\pi-1\right]\cdot(-1)^n + \frac{1}{\pi n^2}\cdot(0-0) \overset{(5)}{=} -\frac{1}{\pi n}\cdot 2\pi\cdot(-1)^n + 0 = -\frac{2\pi\cdot(-1)^n}{\pi n} = -\frac{2\cdot(-1)^n}{n}$$

Здесь в квадратных скобках проводим преобразования $\cos\pi n = (-1)^n$, $\cos(-\pi n) = (-1)^n$ и выносим $(-1)^n$ из квадратных скобок: $\left[(\pi+1)(-1)^n - (-\pi+1)(-1)^n\right] = \left[(\pi+1)-(-\pi+1)\right]\cdot(-1)^n$, после чего раскрываем внутренние скобки: $(\pi+1)-(-\pi+1) = \pi+1+\pi-1$.

Итак, найдены все три коэффициента Фурье:

$$a_0 = 2, a_n = 0, b_n = -\frac{2\cdot(-1)^n}{n}$$

Тогда по формуле,

$$f(x) \sim \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0 \cdot \cos nx - \frac{2 \cdot (-1)^n}{n} \cdot \sin nx\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2 \cdot (-1)^n}{n} \cdot \sin nx\right) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}$$

Таким образом, мы получили разложение функции $f(x) = x + 1$ в ряд Фурье на промежутке $[-\pi, \pi]$:

$$f(x) \sim 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}$$

Изучим вопрос сходимости ряда Фурье.

Изобразим график $f(x) = x + 1$, график представляет собой обычную прямую на плоскости, которая проведена чёрным пунктиром.

График суммы ряда: сумма ряда $S(x)$ - функция, к которой сходится построенный ряд Фурье $1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ изображена красным цветом. Данная функция терпит разрывы 1-го рода в точках $\ldots, x = -3\pi, x = -\pi, x = \pi, x = 3\pi, \ldots$, но определена и в них (красные точки на чертеже). Таким образом:

$$1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n} = S(x).$$

Легко видеть, что $S(x)$ заметно отличается от исходной функции $f(x) = x + 1$, именно поэтому в записи $f(x) \sim 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin nx}{n}$ ставится значок «тильда», а не знак равенства.

Алгоритм, по которому удобно строить сумму ряда следующий:

1). на интервале $(-\pi, \pi)$ ряд Фурье сходится к самой функции $f(x) = x + 1$ (центральный красный отрезок совпадает с чёрным пунктиром линейной функции). В ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ входят только периодические функции (константа, синусы и косинусы), поэтому сумма ряда $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ тоже представляет собой *периодическую функцию*. А это обозначает то, что сумма ряда – красный отрезок интервала $(-\pi, \pi)$ обязан бесконечно повторяться слева и справа, через каждые 2π ситуация вновь и вновь повторяется.

2). Особый интерес представляют *точки разрыва 1-го рода*. В таких точках ряд Фурье сходится к изолированным значениям, которые расположены посередине «скачка» (красные точки на чертеже). Ордината среднего значения:

$$y = \frac{f(\pi) + f(-\pi)}{2} = \frac{\pi + 1 + (-\pi + 1)}{2} = 1.$$

Построим частичную сумму ряда $S_2(x)$. В нашем случае необходимо рассмотреть функцию $S_2(x) = 1 + 2\sin x - \sin 2x$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, вычислить её значения на концах отрезка и в промежуточных точках (чем больше точек рассмотрите – тем точнее будет график). Затем следует отметить данные точки на чертеже и аккуратно изобразить график $S_2(x) = 1 + 2\sin x - \sin 2x$ на периоде $[-\pi, \pi]$, после чего «растиражировать» его на соседние промежутки.

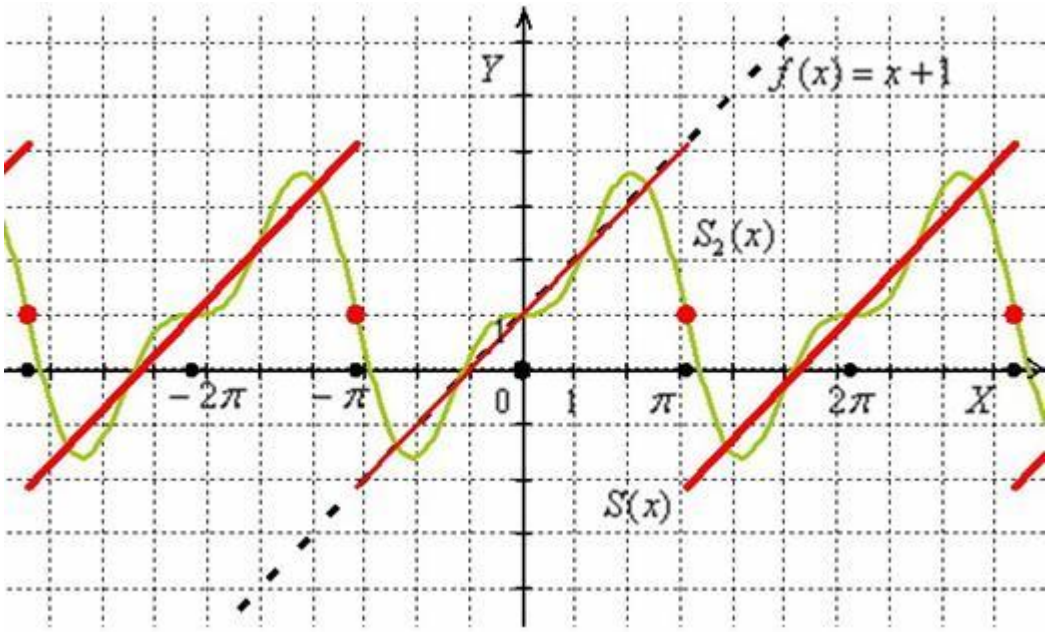
Чтобы составить частичную сумму $S_2(x)$ необходимо записать нулевой и ещё два члена ряда из общей суммы ряда:

$$S(x) = 1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n} = 1 - 2 \cdot \left(\frac{(-1)^1 \sin x}{1} + \frac{(-1)^2 \sin 2x}{2} + \frac{(-1)^3 \sin 3x}{3} + \frac{(-1)^4 \sin 4x}{4} + \ldots \right) =$$

$$= 1 - 2 \cdot \left(-\sin x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} - \ldots \right)$$

То есть, $S_2(x) = 1 - 2 \cdot \left(-\sin x + \frac{\sin 2x}{2} \right) = 1 + 2\sin x - \sin 2x$.

На чертеже график функции $S_2(x) = 1 + 2\sin x - \sin 2x$ изображен зелёным цветом, он достаточно плотно «обвивает» полную сумму $S(x)$. Если рассмотреть частичную сумму из пяти членов ряда $S_5(x)$, то график этой функции будет ещё точнее приближать красные линии, если сто членов $S_{100}(x)$ – то «зелёный змий» фактически полностью сольётся с красными отрезками и т.д. Таким образом, ряд Фурье *сходится* к своей сумме $S(x)$.



Пример #3. Разложить функцию $f(x) = 2x - 1$ в ряд Фурье на $[-\pi;\pi]$.
Решение:

Очевидно, *f(x)* дифференцируема на $[-\pi,\pi]$ и ее период *T*= 2π. тогда определим коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-1)dx = \frac{1}{\pi}(x^2 - x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left((\pi^2-\pi)-(\pi^2+\pi)\right) = -2;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-1)\cos nx dx = \left\{\begin{matrix} u = 2x-1 & du = 2dx \\ dv = \cos x dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2x-1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(2x-1)\sin nx dx = \left\{\begin{matrix} u = 2x-1 & du = 2dx \\ dv = \sin nx dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2x-1}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi-1}{n}\cos n\pi + \frac{-2\pi-1}{n}\cos n\pi\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi}{n}\right)\cos \pi n = -\frac{4}{n}(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{4}{n}.$$

Итак, ряд Фурье имеет вид $S(x) = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$.

Т.к. $f(x) = 2x - 1$ непрерывна на $[-\pi,\pi]$, то $S(x) = f(x) = 2x - 1$ при $x \in (-\pi;\pi)$, а

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = \frac{-2\pi-1+2\pi-1}{2} = -1$$

Значит,

$$2x - 1 = -1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \quad \text{при } x \in (-\pi;\pi).$$

Пример #3. Разложить функцию $f(x)$ в ряд Фурье и построить график суммы.

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если } -3 < x \le 0 \\ 3 - x, & \text{если } 0 \le x \le 3 \end{cases}$$

Решение: Функция имеет *разрыв 1-го рода* в точке $x = 0$. В данной задаче период разложения $T = 6$, полупериод $l = 3$. Функция определена только на полуинтервале $(-3;3]$, но это не меняет дела – важно, что оба куска функции интегрируемы.

Разложим функцию в ряд Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{3} + b_n \sin\frac{\pi n x}{3}\right)$$

Поскольку функция разрывна в начале координат, то каждый коэффициент Фурье очевидным образом следует записать в виде суммы двух интегралов:

Первый интеграл распишу максимально подробно:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{-l}^{0} f(x)dx + \frac{1}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(-2)dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{3}(3-x)dx =$$

$$= -\frac{2}{3}(x)\Big|_{-3}^{0} + \frac{1}{3}\cdot\left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{3} = -\frac{2}{3}(0-(-3)) + \frac{1}{3}\cdot\left(9 - \frac{9}{2} - 3\cdot 0 + \frac{0^2}{2}\right) = -\frac{2}{3}(0+3) + \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{2} = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Далее,

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(-2)\cdot\cos\frac{\pi n x}{3}dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{3}(3-x)\cos\frac{\pi n x}{3}dx = (*)$$

Второй интеграл берём по частям:

$u = 3 - x \Rightarrow du = -dx$

$$dv = \cos\frac{\pi n x}{3}dx \Rightarrow v = \int\cos\frac{\pi n x}{3}dx = \frac{3}{\pi n}\int\cos\frac{\pi n x}{3}d\left(\frac{\pi n x}{3}\right) = \frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}$$

$$(*) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\pi n}\int_{-3}^{0}\cos\frac{\pi n x}{3}d\left(\frac{\pi n x}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{\pi n}(3-x)\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_{0}^{3} + \frac{3}{\pi n}\int_{0}^{3}\sin\frac{\pi n x}{3}dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_{-3}^{0} + \frac{1}{\pi n}\cdot\left[(3-3)\sin\pi n - (3-0)\sin 0\right] + \frac{1}{\pi n}\cdot\left(-\frac{3}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_{0}^{3} =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}(\sin 0 - \sin(-\pi n)) + \frac{1}{\pi n}(0-0) - \frac{3}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n - \cos 0) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}(0-0) + 0 - \frac{3((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} = \frac{3(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}$$

Аналогично,

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0}(-2)\cdot\sin\frac{\pi n x}{3}dx + \frac{1}{3}\int_{0}^{3}(3-x)\sin\frac{\pi n x}{3}dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$u = 3 - x \Rightarrow du = -dx$

$$dv = \sin\frac{\pi n x}{3}dx \Rightarrow v = \int\sin\frac{\pi n x}{3}dx = \frac{3}{\pi n}\int\sin\frac{\pi n x}{3}d\left(\frac{\pi n x}{3}\right) = \frac{3}{\pi n}\cdot\left(-\cos\frac{\pi n x}{3}\right) = -\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3}$$

$$(*) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{\pi n}\int_{-3}^{0}\sin\frac{\pi n x}{3}\,d\left(\frac{\pi n x}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{3}{\pi n}(3-x)\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3-\frac{3}{\pi n}\int_0^3\cos\frac{\pi n x}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3}\Big|_{-3}^{0}-\frac{1}{\pi n}\cdot\left[(3-3)\cos\pi n-(3-0)\cos 0\right]-\frac{1}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\Big|_0^3=$$

$$=\frac{2}{\pi n}(\cos 0-\cos(-\pi n))-\frac{1}{\pi n}(0-3)-\frac{3}{\pi^2 n^2}(\sin\pi n-\sin 0)=$$

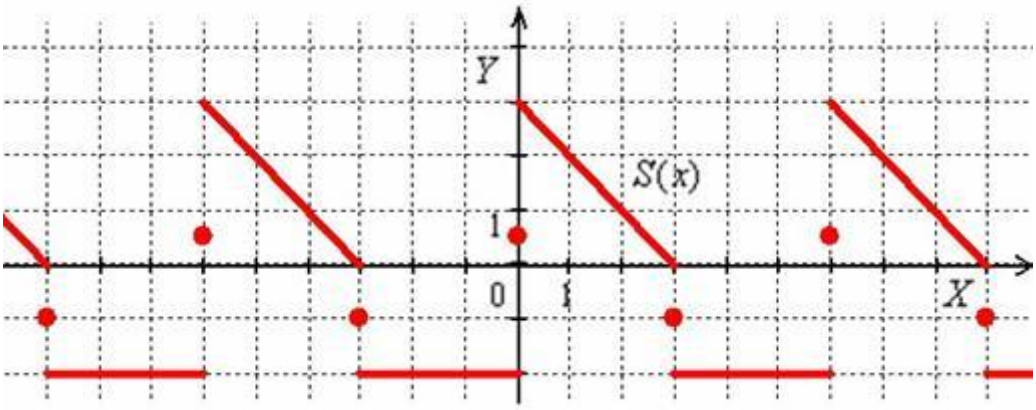
$$=\frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n)+\frac{3}{\pi n}-\frac{3}{\pi^2 n^2}(0-0)=\frac{2(1-(-1)^n)+3}{\pi n}-0=\frac{2-2(-1)^n+3}{\pi n}=\frac{(5-2(-1)^n)}{\pi n}$$

Подставим найдённые коэффициенты Фурье, т.е.

$a_0=-\frac{1}{2}, a_n=\frac{3(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}, b_n=\frac{(5-2(-1)^n)}{\pi n}$ в формулу ряда и получим,

$$f(x)\sim-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{3}+\frac{(5-2(-1)^n)}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\right]$$

Построим график суммы ряда. Кратко повторим порядок действий: на интервале $(-3;0)$ строим прямую $f(x)=-2$, а на интервале $(0;3)$ – прямую $f(x)=3-x$. При нулевом значении x ставим точку посередине «скачка» разрыва $(y=0{,}5)$ и «тиражируем» график на соседние периоды:



На «стыках» периодов $\ldots, x=-9, x=-3, x=3, x=9, \ldots$ сумма также будет равна серединам «скачка» разрыва $(y=-1)$.

$$f(x)\sim-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3(1-(-1)^n)}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{3}+\frac{(5-2(-1)^n)}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\right]$$

Пример #4. Найти разложение в ряд Фурье трапециевидной волны, заданной функцией:

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1\\ 1, & 1<x\le 2\\ 3-x, & 2<x\le 3\end{cases}.$$

Решение.

В данном случае, очевидно, $L = \frac{3}{2}$. Вычислим коэффициенты разложения a_0 и a_n.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\,dx = \frac{2}{3}\left[\int_0^1 x dx + \int_1^2 1 dx + \int_2^3 (3-x)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 + \left(3x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^3\right] = \frac{4}{3};$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx = \frac{2}{3}\left\{\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx + \int_1^2 \cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right.$$

$$\left. + \int_2^3 (3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx\right\} = \frac{2}{3}\left\{\left[\left(\frac{3}{2n\pi}x\sin\frac{2n\pi x}{3}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}dx\right]\right.$$

$$\left. + \left(\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}\right)\Big|_1^2 + \left[\left(\frac{3}{2n\pi}(3-x)\sin\frac{2n\pi x}{3}\right)\Big|_2^3 + \int_2^3 \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{3}dx\right]\right\}$$

$$= \frac{2}{3}\left\{\frac{3}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right) + \frac{3}{2n\pi}\left(\sin\frac{4n\pi}{3} - \sin\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{3}{2n\pi}\sin\frac{4n\pi}{3}\right.$$

$$\left. + \frac{9}{4n^2\pi^2}\left(-\cos 2n\pi + \cos\frac{4n\pi}{3}\right)\right\} = \frac{2}{3}\left\{\frac{9}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right) + \frac{9}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{4n\pi}{3} - 1\right)\right\}.$$

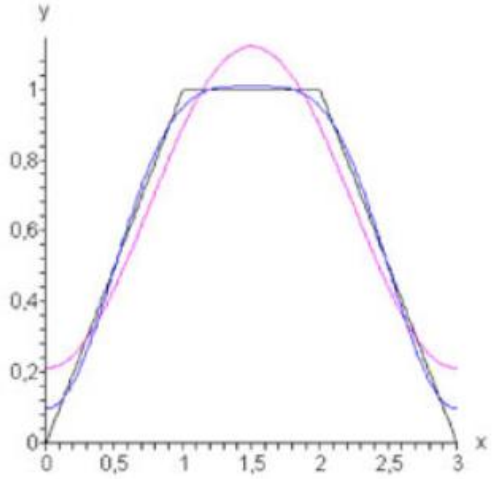
Так как $\cos\frac{4n\pi}{3} = \cos\left(2n\pi - \frac{2n\pi}{3}\right) = \cos\frac{2n\pi}{3}$, то получаем

$$a_n = \frac{2}{3}\cdot\frac{2\cdot 9}{4n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right) = \frac{3}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right),\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Коэффициенты b_n равны нулю, поскольку функция четная на заданном интервале $[0, 3]$. Тогда разложение в ряд Фурье выражается формулой

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1 - \cos\frac{2n\pi}{3}}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}.$$

График данной функции и аппроксимации Фурье при $n = 1$ и $n = 3$ показаны на рисунке



Пример #5. Дана функция $f(x)=|x|$. Требуется:

1) разложить функцию в ряд Фурье с периодом $T=2l$, где l – произвольное положительное число;

2) записать разложение на промежутке $[-\pi,\pi]$, построить функцию $f(x)=|x|$ и график полной суммы ряда $S(x)$.

Решение: 1) В данной задаче период разложения $T=2l$, полупериод l. В ходе дальнейших действий, в частности при интегрировании, *l* считается константой.

Функция $f(x)=|x|$ является чётной, а значит, раскладывается в ряд Фурье только по косинусам: $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{l}$.

Коэффициенты Фурье ищем по формулам: $a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx$.

Интегрирование проводится по положительному отрезку разложения, а значит, мы избавляемся от модуля $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & если\quad x\ge 0\\ -x, & если\quad x<0\end{cases}$, рассматривая из двух кусков только +*x*. И, заметно упрощается интегрирование:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\frac{2}{l}\int_0^l xdx=\frac{2}{l}\cdot\frac{1}{2}(x^2)\Big|_0^l=\frac{1}{l}\cdot(l^2-0)=l$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{\pi nx}{l}dx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$$u=x\Rightarrow du=dx$$

$$dv=\cos\frac{\pi nx}{l}dx\Rightarrow v=\int\cos\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{l}{\pi n}\int\cos\frac{\pi nx}{l}d\left(\frac{\pi nx}{l}\right)=\frac{l}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{l}$$

$$(*)=\frac{2}{l}\left(\frac{l}{\pi n}x\sin\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^l-\frac{l}{\pi n}\int_0^l\sin\frac{\pi nx}{l}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}(l\sin\pi n-0\cdot\sin 0)-\frac{2}{\pi n}\cdot\left(-\frac{l}{\pi n}\right)\cdot\cos\frac{\pi nx}{l}\Big|_0^l=$$

$$=\frac{2}{\pi n}(0-0)+\frac{2l}{\pi^2n^2}(\cos\pi n-\cos 0)=\frac{2l\cdot((-1)^n-1)}{\pi^2n^2}$$

Таким образом:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l} = \frac{l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2l\cdot((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}\cdot\cos\frac{\pi n x}{l}\right] = \frac{l}{2} + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\cos\frac{\pi n x}{l}\right],$$

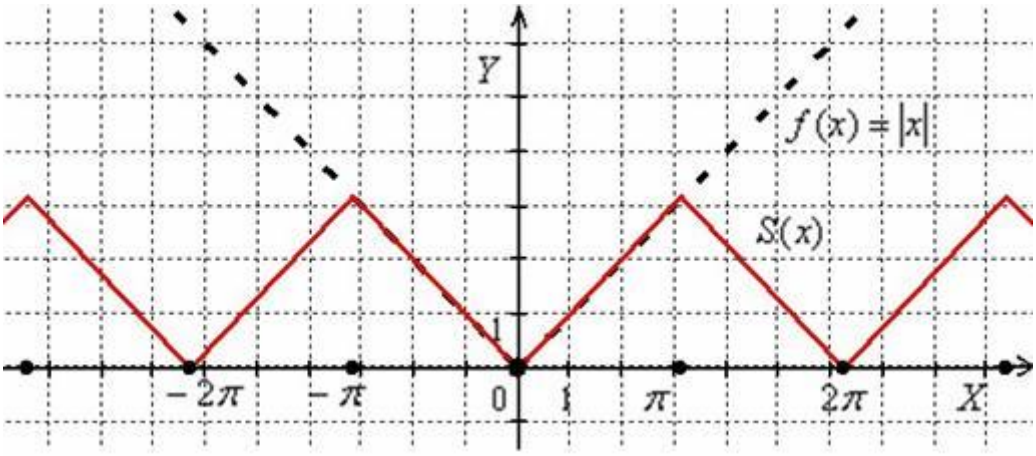
при этом константу $\frac{2l}{\pi^2}$, которая не зависит от «эн», выносим за пределы суммы.

Ответ: $f(x) \sim \frac{l}{2} + \frac{2l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\cos\frac{\pi n x}{l}\right]$

2) Запишем разложение $f(x) = |x|$ на промежутке $[-\pi, \pi]$, для этого в общую формулу подставляем нужное значение полупериода $l = \pi$:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\cos\frac{\pi n x}{\pi}\right] = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{((-1)^n-1)}{n^2}\cos nx\right]$$

В данном случае сумма ряда $S(x)$ непрерывна, и, чётна, её график :



Пример #6. Разложить функцию $f(x) = 2x - 1$ в ряд Фурье на промежутке $-2 \le x < 2$ и построить график суммы ряда.

Решение: В данной задаче период разложения $T = 4$, полупериод $l = 2$.

Используя соответствующие формулы, вычислим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2x-1)dx = \frac{1}{2}(x^2 - x)\Big|_{-2}^{2} = \frac{1}{2}(4 - 2 - (4+2)) = \frac{1}{2}\cdot(-4) = -2$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2x-1)\cos\frac{\pi n x}{2}dx = (*)$$

Интегрируем по частям:

$u = 2x - 1 \Rightarrow du = 2dx$

$dv = \cos\frac{\pi n x}{2}dx \Rightarrow v = \frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}$

$$(*)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi n}(2x-1)\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-2}^{2}-\frac{4}{\pi n}\int_{-2}^{2}\sin\frac{\pi n x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi n}(0-0)-\frac{2}{\pi n}\cdot\left(-\frac{2}{\pi n}\right)\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-2}^{2}=\frac{4}{\pi^2 n^2}(\cos\pi n-\cos(-\pi n))=0$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}(2x-1)\sin\frac{\pi n x}{2}dx=(*)$$

Интегрируем по частям:

$$u=2x-1\Rightarrow du=2dx$$

$$dv=\sin\frac{\pi n x}{2}dx\Rightarrow v=-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}$$

$$(*)=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}(2x-1)\cos\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-2}^{2}+\frac{4}{\pi n}\int_{-2}^{2}\cos\frac{\pi n x}{2}dx\right)=$$

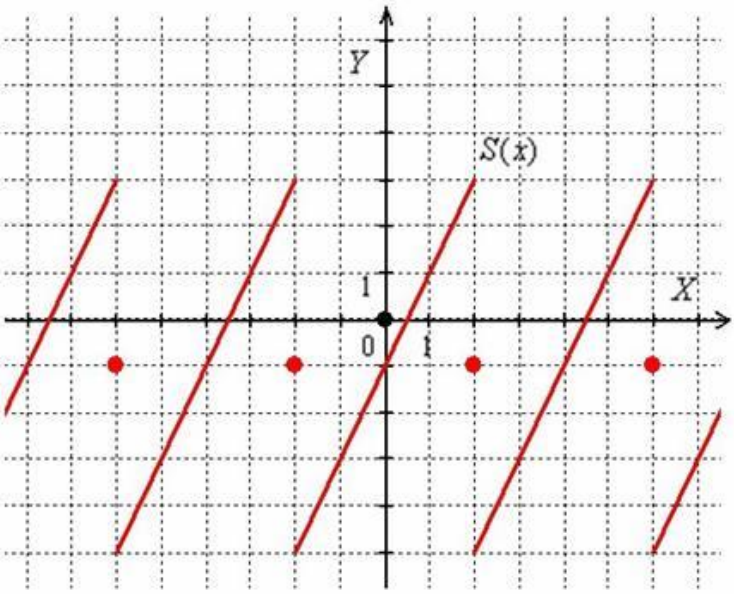
$$=-\frac{1}{\pi n}\cdot\left[3\cos\pi n-(-5)\cos(-\pi n)\right]+\frac{2}{\pi n}\cdot\frac{2}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\Big|_{-2}^{2}=$$

$$=-\frac{1}{\pi n}(3(-1)^n+5(-1)^n)+\frac{4}{\pi^2 n^2}(0-0)=-\frac{8(-1)^n}{\pi n}$$

Таким образом:

$$f(x)\sim\frac{-2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(0\cdot\cos\frac{\pi n x}{2}-\frac{8(-1)^n}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{2}\right)=-1-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}\right)$$

Изобразим на чертеже сумму ряда:



Ответ: $f(x)\sim-1-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\pi n x}{2}\right)$

Пример #7.

Разложить функцию $f(x)=2x-1$ в ряд Фурье на $[0;2\pi]$.

Решение:

Если бы *f(x)* была 2π—периодической, ее ряд Фурье на $[0;2\pi]$ имел бы точно

такой же вид, что и на $[-\pi;\pi]$, но $f(x)=2x-1$ на $[0;2\pi]$ не является 2π—периодической функцией. Однако 2π—периодичность тригонометрической системы функций позволяет найти коэффициенты Фурье по формулам,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,$$

с заменой отрезка интегрирования на другой отрезок длины 2π:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2x-1)dx=\frac{1}{\pi}(x^2-x)\Big|_0^{2\pi}=\frac{1}{\pi}\left(4\pi^2-2\pi\right)=4\pi-2;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2x-1)\cos nx\,dx=\left\{\begin{matrix}u=2x-1\\ dv=\cos nx\,dx\end{matrix}\middle|\begin{matrix}du=2dx\\ v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{2x-1}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}\cos\Big|_0^{2\pi}=\frac{2}{\pi n^2}(1-1)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(2x-1)\sin nx\,dx=\left\{\begin{matrix}u=2x-1\\ dv=\sin nx\,dx\end{matrix}\middle|\begin{matrix}du=2dx\\ v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2x-1}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{2}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right)=$$

$$=-\frac{4\pi-1}{\pi n}\cos 2\pi n-\frac{1}{\pi n}\cos 0+\frac{2}{\pi n^2}(\sin 2\pi n-\sin 0)=-\frac{4\pi-1+1}{\pi n}=-\frac{4}{n}.$$

Итак, ряд Фурье имеет вид

$$S(x)=2\pi-1+\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{4}{n}\sin nx=2\pi-1-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \text{ а}$$

$$S(0)=S(2\pi)=\frac{f(0)+f(2\pi)}{2}=\frac{-1+4\pi-1}{2}=2\pi-1.$$

Значит,

$$2x-1=2\pi-1-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \quad x\in(0,2\pi).$$

Если необходимо разложить в ряд Фурье кусочно дифференцируемую функцию *f(x)* заданную лишь на отрезке $[0,\pi]$, то ее можно продолжить произвольным образом в $[-\pi,0)$ с сохранением кусочной дифференцируемости и получить при этом бесконечное множество различных разложений (совпадающих численно лишь в $(0,\pi)$). Вызывают интерес два специальных продолжения: *четное* и *нечетное.*

1). Если новая функция $f^*(x)$ **четная**, то по свойствам интеграла от четной функции по симметрическому промежутку

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,$$

$b_n = 0$, $n = 0,1,2,\ldots$

В результате, получаем так называемое разложение *по косинусам*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

2). Если новая функция $f^*(x)$ **нечетная**, то по свойствам интеграла от нечетной функции по симметрическому промежутку

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1,2,\ldots$$

$a_n = 0$, $n = 0,1,2,\ldots$

В результате, получаем так называемое разложение *по синусам*:

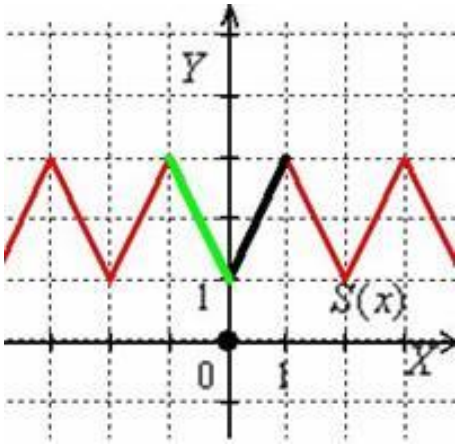
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Разложение чётной функции часто маскируют типовой формулировкой, пример:

Разложить функцию $f(x) = 2x + 1$ *в ряд Фурье по косинусам на промежутке* $[0; 1]$.

Если по условию не нужно чертежа, применяем (для чётной функции) формулы $a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx$ и даём ответ в виде $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}$.

Но если дополнительно требуется построить график суммы, то необходимо понимать следующее: разложение по косинусам отобразит отрезок прямой $f(x) = 2x + 1$ (чёрная линия) **чётным образом (симметрично относительно оси** OY**) на интервал** $[-1; 0]$ (зелёная линия), и, очевидно, функция $S(x)$ будет иметь непрерывный пилообразный график:



В ряде случаев симметричное продолжение функции надо записать

аналитически. Начинающим рекомендую графический метод: сначала на промежутке $[0;1]$ чертим отрезок прямой $f(x)=2x+1$, затем, симметрично относительно оси ординат – его «зелёного коллегу». Находим уравнение прямой $f(x)=-2x+1$, которая содержит зелёный отрезок (устно, или, например, по двум точкам). Таким образом, эта же задача может быть сформулирована по-другому:

Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-2x+1, & \text{если } -1\le x<0\\ 2x+1, & \text{если } 0\le x\le 1\end{cases}.$$

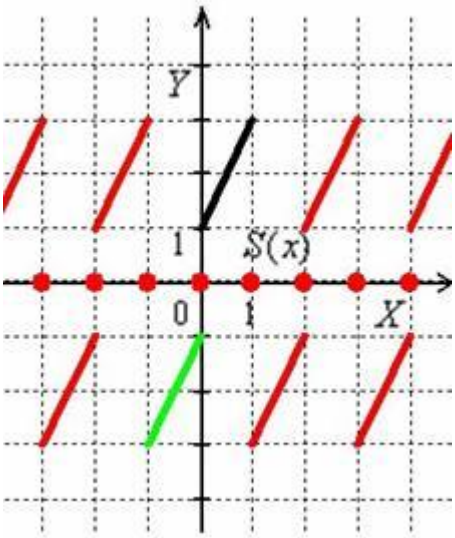
<u>Примечание:</u> Условие чётности $f(-x)=f(x)$ нетрудно проверить аналитически. В левую часть функции подставляем «-*x*»: $f(-x)=-2(-x)+1=2x+1=f(x)$ – в результате чего получаем правую часть.

Аналогично вуалируется нечётность:

Разложить функцию $f(x)=2x+1$ *в ряд Фурье по синусам на промежутке* $[0;1]$.

Если чертёж не нужен, ищем коэффициент $b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx$ и записываем ответ в виде $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}$.

Однако в любом случае полезно знать следующее: разложение по синусам отобразит отрезок прямой $f(x)=2x+1$ (чёрная линия) нечётным образом (симметрично относительно начала координат) на интервал $[-1;0]$ (зелёная линия):



Составим уравнение «зелёного» продолжения (например, по предложенному в предыдущем пункте алгоритму) и перепишем задачу в эквивалентной

формулировке:

Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{если } -1\le x<0\\ 2x+1, & \text{если } 0\le x\le 1\end{cases}.$$

Итак, если вам встретилось похожее условие, то сначала постройте график функции и изучите его на предмет симметрии – чтобы не пришлось использовать общие формулы разложения.

<u>*Примечание*</u>: условие нечётности $f(-x)=-f(x)$ аналитически, для этого в левый кусок функции подставляем «-*x*»: $f(-x)=2(-x)-1=-2x-1=-(2x+1)=-f(x)$ в результате чего получается правый кусок с противоположным знаком.

Пример #8. Разложить функцию $f(x)=x^2$ по косинусам на отрезке $[0,\pi]$.

Решение:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int x^2\sin nx\,dx=\left\{\begin{matrix}u=x^2 & du=2x\,dx\\ dv=\sin nx\,dx & v=-\frac{1}{n}\cos nx\end{matrix}\right\}=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}x^2\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=-\frac{2\pi}{n}\cos\pi n+\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=x & du=dx\\ dv=\cos nx\,dx & v=\frac{1}{n}\sin nx\end{matrix}\right\}=-\frac{2\pi}{n}(-1)^n+\frac{4}{\pi n}\left(\frac{x}{n}\sin nx+\frac{1}{n^2}\cos nx\right)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}+\frac{4}{\pi n^3}\cos nx\Big|_0^{\pi}=(-1)^{n+1}\frac{2\pi}{n}+\frac{4}{\pi n^3}\left((-1)^n-1\right)$$

$$b_{2k}=-\frac{2\pi}{2k}+\frac{4}{\pi(2k)^3}(1-1)=-\frac{\pi}{k};\quad b_{2k-1}=\frac{2\pi}{2k-1}+\frac{4}{\pi(2k-1)^3}(-2)=\frac{2\pi}{2k-1}-\frac{8}{\pi(2k-1)^3}.$$

Итак,

$$S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2\pi}{2k-1}-\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\right)\sin(2k-1)x-\frac{\pi}{k}\sin 2kx\right).$$

$S(x)=f(x)=x^2$ при $x\in(0,\pi)$, $S(0)=S(\pi)=0$.

Ответ:

$$x^2=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2\pi}{2k-1}-\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\right)\sin(2k-1)x-\frac{\pi}{k}\sin 2kx\right),\quad x\in[0,\pi).$$

Пример #9. Разложить функцию в ряд Фурье и построить график суммы ряда не менее чем на трёх периодах

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } -1\le x<0\\ 1, & \text{если } 0\le x\le 1\end{cases}$$

Решение: В данной задаче период разложения $T=2$, полупериод $l=1$. Функция является нечётной, а значит, раскладывается в ряд Фурье только по синусам: $f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{l}$.

Вычислим коэффициент Фурье:

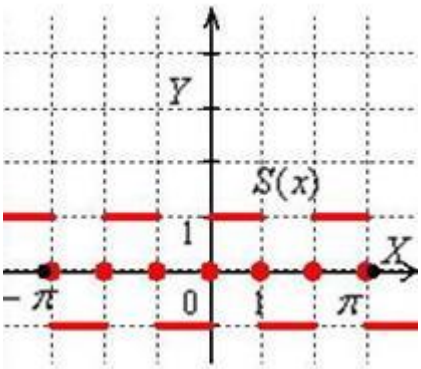
$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi nx}{l}dx=\frac{2}{1}\int_0^1 1\cdot\sin\frac{\pi nx}{1}dx=2\int_0^1\sin(\pi nx)dx=\frac{2}{\pi n}\int_0^1\sin(\pi nx)d(\pi nx)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}(\cos(\pi nx))\Big|_0^1=-\frac{2}{\pi n}(\cos\pi n-\cos 0)=-\frac{2((-1)^n-1)}{\pi n}=\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}$$

Таким образом:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n}\cdot\sin(\pi nx)\right]=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1-(-1)^n)}{n}\cdot\sin(\pi nx)\right]$$

Построим график суммы ряда:



Ответ $f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(1-(-1)^n)}{n}\cdot\sin(\pi nx)\right]$