ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ПОЛЯ
ПОХІДНА ЗА НАПРЯМОМ. ГРАДІЄНТ

Область простору, кожній точці M якої поставлено у відповідність значення деякої скалярної величини $u(M)$ називають скалярним полем.

Прикладами скалярних полів є поле температури даного тіла, поле густини даного неоднорідного середовища, поле атмосферного тиску, поле потенціалів заданого електростатичного поля тощо.

Якщо функція $u(M)$ не залежить від часу, то скалярне поле називають **стаціонарним**, а скалярне поле, яке змінюється з часом – **нестаціонарним**.

Якщо скалярна функція $u(M)$ залежить тільки від двох змінних, то відповідне скалярне поле $u(x, y)$ називають **плоским**. Якщо ж функція $u(M)$ залежить від трьох змінних, то скалярне поле $u(x, y, z)$ називають **просторовим**.

Для плоского скалярного поля розглядають **лінії рівня**, на яких функція $u(x, y)$ має стале значення. Рівняння лінії рівня – $u(x, y)=C$, $C=\text{const}$.

Поверхнею рівня скалярного поля, заданого функцією $u(x, y, z)$ називають поверхню, на якій функція має стале значення. Рівняння поверхні рівня – $u(x, y, z)=C$, $C=\text{const}$.

Геометрично плоскі скалярні поля зображують за допомогою **ліній рівня**, а просторові – за допомогою **поверхонь рівня**.

Для характеристики швидкості зміни поля в заданому напрямі введемо поняття **похідної за напрямом**.

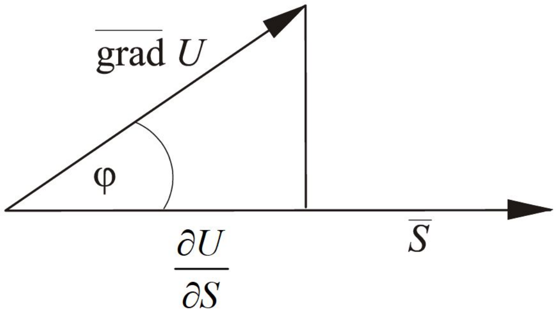
Розглянемо на множині D диференційовану функцію $U = f(x, y, z)$ і точку $M(x, y, z)$. Проведемо з точки M вектор $\overline{S}\{S_x, S_y, S_z\}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha = \dfrac{S_x}{|\overline{S}|}$, $\cos\beta = \dfrac{S_y}{|\overline{S}|}$, $\cos\gamma = \dfrac{S_z}{|\overline{S}|}$, тоді похідна від функції $U = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$ за напрямом вектора $\overline{S}$ буде обчислюватись за формулою:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma.$$

Зазначимо, що будь-яка частинна похідна є окремим випадком похідної за напрямом. Наприклад, якщо $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = \dfrac{\pi}{2}$, то $\dfrac{\partial U}{\partial S} = \dfrac{\partial U}{\partial x}$ $(\cos\alpha = \cos 0 = 1$, $\cos\beta = \cos\gamma = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$). $\dfrac{\partial U}{\partial S}$

Вектор, у якого проекціями на осі координат є значення частинних похідних функції $U = f(x, y, z)$ в точці $M(x, y, z)$, зветься **градієнтом функції** U.

$$\overline{\text{grad}}\ U = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\overline{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\overline{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\overline{k}.$$



Якщо кут між векторами $\overline{\text{grad}}U$ і $\overline{S}$ позначити через φ, то $\dfrac{\partial U}{\partial S} = \left|\overline{\text{grad}}U\right|\cdot\cos\varphi$. Тобто похідна $\dfrac{\partial U}{\partial S}$ дорівнює проекції $\overline{\text{grad}}U$ на вектор $\overline{S}$.

Якщо $\varphi = 0$, то $\dfrac{\partial U}{\partial \overline{S}} = \left|\overline{\mathrm{grad} U}\right|$ – найбільше значення похідної в точці M (у цьому випадку напрям вектора $\overline{S}$ збігається з напрямом градієнта).

Якщо $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ $\left(\cos\dfrac{\pi}{2} = 0\right)$, то похідна у напрямі вектора, перпендикулярного вектору $\overline{\mathrm{grad} U}$ завжди дорівнює нулю.

Приклад . Від заданої функції $U = x^2 - xy + y^3 z^2$ знайти:
1) похідну в точці $M(1,\text{-}2,\text{-}1)$ у напрямку вектора $\overline{S}\{3,\text{-}1,2\}$;
2) градієнт функції U в точці M.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції U і їх значення в точці M:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - y; \qquad \frac{\partial U(M)}{\partial x} = \frac{\partial U(1,\text{-}2,\text{-}1)}{\partial x} = 4;$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + 3y^2 z^2; \qquad \frac{\partial U(1,\text{-}2,\text{-}1)}{\partial y} = 11;$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2y^3 z; \qquad \frac{\partial U(1,\text{-}2,\text{-}1)}{\partial z} = 16.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\overline{S}$:

$$\cos\alpha = \frac{S_x}{\left|\overline{S}\right|} = \frac{3}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{14}}; \qquad \cos\beta = \frac{S_y}{\left|\overline{S}\right|} = -\frac{1}{\sqrt{14}}; \qquad \cos\gamma = \frac{S_z}{\left|\overline{S}\right|} = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Тоді похідна функції U у напрямку $\overline{S}$ в точці M буде дорівнювати числу:

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{S}} = 4\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} + 11\cdot\frac{(-1)}{\sqrt{14}} + 16\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{33}{\sqrt{14}}.$$

За формулою градієнта маємо: $\overline{\mathrm{grad} U} = 4\overline{i} + 11\overline{j} + 16\overline{k}$.

Приклад . Знайти похідну функції $u=xy^2z^3$ у точці M(3;2;1) за напрямком вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо N(5;4;2).

Похідна за напрямком вектора $\vec{l}$ функції u(x,y,z) обчислюється за формулою (7).

Знайдемо вектор $\overrightarrow{MN}$ та його напрямні косинуси:

$$\overrightarrow{MN} = (5-3)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k};$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{3}; \quad \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{1}{3}.$$

Обчислимо тепер значення частинних похідних функції u(x,y,z) у точці M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z^3; \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3; \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M = 4; \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M = 12; \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M = 36.$$

Підставимо отримані результати у формулу похідної за напрямком:

$$\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{MN}}\Big|_M = 4\cdot\frac{2}{3} + 12\cdot\frac{2}{3} + 36\cdot\frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}.$$

Приклад . Знайти величину та напрямок градієнта функції $u = tgx - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + ctgz$ у точці М($\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}$).

Знайдемо частинні похідні у точці М:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3\cos y - 3\sin^2 y \cos y; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 1 - \frac{1}{\sin^2 z};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M = 2 - 1 = 1; \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M = 3\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}; \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M = 1 - 1 = 0.$$

Координати вектора градієнта $\overrightarrow{grad\ u}\big|_M (1;\frac{3}{8};0)$.

Модуль (величина) градієнта дорівнює :

$$\left|\overrightarrow{gradu}\right|_M = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{8}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{73}}{8}.$$

Його напрямок визначають напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{73}}{8}} = \frac{8}{\sqrt{73}}; \cos\beta = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{\sqrt{73}}{8}} = \frac{3}{\sqrt{73}} : \cos\gamma = \frac{0}{\frac{\sqrt{73}}{8}} = 0.$$

Приклад . Від заданої функції $U = x^2 - xy + y^3z^2$ знайти:

1) похідну в точці $M(1,\text{-}2,\text{-}1)$ у напрямку вектора $\overline{S}\{3,\text{-}1,2\}$;

2) градієнт функції U в точці M.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції U і їх значення в точці M:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x - y; \qquad \frac{\partial U(M)}{\partial x} = \frac{\partial U(1,\text{-}2,\text{-}1)}{\partial x} = 4;$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -x + 3y^2z^2; \qquad \frac{\partial U(1,\text{-}2,\text{-}1)}{\partial y} = 11;$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 2y^3z; \qquad \frac{\partial U(1,\text{-}2,\text{-}1)}{\partial z} = 16.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\overline{S}$:

$$\cos\alpha = \frac{S_x}{|\overline{S}|} = \frac{3}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{14}}; \qquad \cos\beta = \frac{S_y}{|\overline{S}|} = -\frac{1}{\sqrt{14}}; \qquad \cos\gamma = \frac{S_z}{|\overline{S}|} = \frac{2}{\sqrt{14}}.$$

Тоді похідна функції U у напрямку $\overline{S}$ в точці M буде дорівнювати числу:

$$\frac{\partial U}{\partial \overline{S}} = 4\cdot\frac{3}{\sqrt{14}} + 11\cdot\frac{(-1)}{\sqrt{14}} + 16\cdot\frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{33}{\sqrt{14}}.$$

За формулою градієнта маємо: $\overline{\mathrm{grad}}U = 4\overline{i} + 11\overline{j} + 16\overline{k}$.

Питання на самоперевірку

1. Що називається скалярним полем?
2. Навести приклади скалярного поля.
3. Яке поле називають стаціонарним і нестаціонарним?
4. Записати формулу для похідної за напрямом від функції $u = f(x,y,z)$.
5. У чому полягає фізичний зміст похідної за напрямом?
6. Дати означення градієнта скалярного поля.
7. Як визначається зв'язок між $\overline{\mathrm{grad}}U$ і $\dfrac{\partial U}{\partial S}$?

ЗАВДАННЯ

1. Знайти області визначення функцій та схематично зобразити їх.
2. Знайти частинні похідні від функцій.
3. Знайти повні диференціали функцій.
4. Знайти похідні складених функцій.
5. Знайти похідні від неявно заданих функцій.
6. Довести, що задані функції задовольняють рівнянням.
7. Побудувати лінії рівня функції $z = f(x, y)$.
8. Знайти похідну функції $z = f(x, y)$ в точці A у напрямку вектора $\overline{S}$.
9. Знайти градієнт функції $z = f(x, y)$ в точці A.
10. Знайти рівняння дотичної площини та нормалі до поверхні в указаній точці.

Варіант 1

1. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.

2. а) $z = \ln\left(\frac{1}{xy}\right)$; б) $z = \cos^2\left(\frac{x}{y}\right)$; в) $z = \frac{x^2 - \sqrt{y}}{x^2 + \sqrt{y}}$.

3. $z = \operatorname{arctg}(xy)$.

4. а) $z = \sin(x^2 - y)$, $x = e^{2t}$, $y = 2^t$;

б) $z = \ln(\sqrt{x} - y^2)$, $x = uv$, $y = u^2 - v^2$.

5. а) $z^3 + 3x^2 z = 2xy$; б) $x^3 y^2 - xy^5 + 5x + y = 0$.

6. $z = e^{xy}$, $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

7. $z = x^2 + 2y$.

8. $z = x^2 + xy + y^2$, $A(1;1)$, $\overline{a}(2;1)$.

9. $z = x^2 + 2y$, $A(2;2)$.

10. $z = x^2 + y^2$, $P(1;2;5)$.

Варіант 2

1. $z = \ln(x^2 + y)$.

2. а) $z = \sin^2\left(\frac{x}{y}\right)$; б) $z = \ln^3\left(\frac{1}{x} - y\right)$; в) $z = (y^4 + 2)^{x^2}$.

3. $z = \ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{y}\right)$.

4. а) $z = \sin(4y - 3xy)$, $x = 4^{5+2t}$, $y = 1 - t^2$;

б) $z = 15^{\arcsin(xy)}$, $x = \frac{u^2}{v}$, $y = \frac{1}{uv}$.

5. а) $z^2 + 3x^3 z = 2xy$; б) $x^2 y^3 - x^5 y + 5y + x = 0$.

6. $z = \sin^2(x - y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

7. $z = x^2 - y^2$.

8. $z = x^3 - xy^2 - y^3$, $A(2;1)$, $\overline{a}(-3;1)$.

9. $z = x^3 - xy^2 - y^3$, $A(1;2)$.

10. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $P(3;4;12)$.