ТЕМА 3 РЯДИ ФУР'Є

3.1 Ортогональна система функцій. Ряд Фур'є

Нехай на відрізку [*a;b*] задано дві інтегровні функції *f(x)* і *g(x)*.

Функції *f(x)* і *g(x)* називають ортогональними на відрізку [*a; b*], якщо

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Приклад 3.1 Функції *sin x* і *cos x* ортогональні на відрізку [-π; π], оскільки

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x dx = \frac{\sin^2 x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Зауваження.

Нехай *f(x)* є непарна функція, а *g(x)*- парна. Такі функції на відрізку [-*a;a*], де *a* - довільне число, ортогональні.

Скінченну чи нескінченну систему (множину) функцій *f(x), $f_2(x)$, ... , $f_k(x)$, ...* називають ортогональною на відрізку [*a,b*], якщо будь-які дві різні функції цієї системи ортогональні на цьому відрізку, тобто

$$\int_a^b f_k(x) f_j(x) dx = 0 \quad \text{для} \quad \kappa \neq j \quad (k, j = 1,2,...,n,...).$$

Приклад 3.2 Довести, що система функцій

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ... \tag{3.1}$$

ортогональна на відрізку [-π; π].

Доведення

Дійсно, обчислимо інтеграли: 1. $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx dx = \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

2. $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx dx = -\frac{1}{n} \cos nx \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$

3. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin \kappa x \cdot \cos lx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(\kappa + l)x + \sin(\kappa - l)x] dx =$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\kappa + l}\cos(\kappa + l)x + \frac{1}{\kappa - l}\cos(\kappa - l)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad \kappa \neq l.$$

4. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\kappa x\cdot\sin lx dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(\kappa-l)x+\cos(\kappa+l)x\right]dx=$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\kappa-l}\sin(\kappa-l)x-\frac{1}{\kappa+l}\sin(\kappa+l)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0,\quad \kappa\neq l.$$

5. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\kappa x\cdot\cos\kappa x dx=\frac{1}{\kappa}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\kappa x d(\sin\kappa x)=\frac{1}{2\kappa}\left[\sin^2\kappa x\right]_{-\pi}^{\pi}=0.$

6. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\kappa\cdot\cos lx dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(\kappa+l)x+\cos(\kappa-l)x\right]dx=$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\kappa+l}\sin(\kappa+l)x+\frac{1}{\kappa-l}\cos(\kappa-l)x\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0,\quad \kappa\neq l$$

Обчислимо ще такі інтеграли ($\kappa = 1,2, ...$):

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin^2\kappa x dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1-\cos 2\kappa x)dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2\kappa}\sin 2\kappa x\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi;$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2\kappa x dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}(1+\cos 2\kappa x)dx=\frac{1}{2}\left[x+\frac{1}{2\kappa}\sin 2\kappa x\right]_{-\pi}^{\pi}=\pi.$$

Очевидно, що функції які входять в тригонометричну систему (3.1), є періодичними із найменшим періодом 2π.

<u>Основні властивості періодичних функцій</u>

1. Якщо *T*- період функції *f(x)*, то *f(x) = f(x + T) = f(x + kT)*, де *k* - будь-яке ціле число.
2. Сума, добуток і частка періодичних функцій є функція періодична.
3. Якщо *f (x)* періодична функція з періодом *T*, то функція *f(ax)* має період $\frac{T}{a}$.
4. Якщо Т - період функції *f(x*), то визначений інтеграл від неї на будь-якому відрізку довжини Т має одне і те ж саме значення:

$$\int\limits_{a}^{a+T}f(x)dx=\int\limits_{b}^{b+T}f(x)dx.$$

Найпростішою, і в той же час важливою для застосувань, є періодична функція

$$y=A\sin(\omega t+\varphi),$$

де *A*, ω, φ - сталі. Цю функцію називають *гармонікою з амплітудою* $|A|$, *частотою* ω і *початковою фазою* φ.

Користуючись відомою формулою тригонометрії, можемо записати:

$$A\sin(\omega t+\varphi)=A(\cos\omega t\sin\varphi+\sin\omega t\cos\varphi).$$

Нехай $$a = A\sin\varphi, \quad b = A\cos\varphi. \tag{3.2}$$

Впевнимося, що будь-яку гармоніку можна подати у вигляді

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t, \tag{3.3}$$

і навпаки, будь-яка функція вигляду (3.3) є гармоніка. Щоб впевнитися в цьому, достатньо знайти A і φ з рівнянь (3.2). При цьому одержимо

$$A = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \sin\varphi = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{b}{A} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

звідки φ легко знаходиться.

В подальшому для гармонік будемо використовувати запис (3.3).

Функціональний ряд вигляду

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx), \tag{3.4}$$

де $a_0, a_к, b_k \quad (k = 1,2,...)$ - сталі дійсні числа, називають *тригонометричним рядом*, а числа $a_0, a_k, b_k \quad (k = 1,2,...)$ - *коефіцієнтами* тригонометричного ряду.

Нехай тригонометричний ряд (3.4) рівномірно збіжний на відрізку $[-\pi\,;\,\pi]$. Позначимо його суму через *f(x):*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \tag{3.5}$$

Оскільки члени ряду (3.5) є функції неперервні, а сам ряд, за припущенням, рівномірно збіжний на відрізку $[-\pi\,;\,\pi]$, то його на цьому відрізку можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f(x)dx} = \frac{\mathrm{a}_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\right).$$

Оскільки члени ряду (3.5) є функції неперервні, а сам ряд, за припущенням, рівномірно збіжний на відрізку $[-\pi\,;\,\pi]$, то його на цьому відрізку можна почленно інтегрувати, тобто

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f(x)dx} = \frac{\mathrm{a}_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\right).$$

Інтеграли $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx$ *і* $\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx$, згідно з рівностями з прикладу 3.2, дорівнюють нулю. Тому

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f(x)dx} = \frac{\mathrm{a}_0}{2}x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi a_0.$$

Звідси знаходимо $$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{f(x)dx}. \tag{3.6}$$

Помножимо тепер ліву і праву частини рівності (3.5) на *cosnx*. Дістанемо такий функціональний ряд

$$f(x)\cos nx = \frac{a_0}{2}\cos nx + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)\cos nx .$$

Можна довести, що цей ряд рівномірно збіжний на відрізку $[-\pi\,;\ \pi]$, якщо на цьому відрізку рівномірно збіжний ряд (3.5). Тоді, інтегруючи почленно попередню рівність, матимемо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx \cos nx dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx \cos nx dx\right).$$

У правій частині цієї рівності всі інтеграли дорівнюють нулю (згідно з рівностями з прикладу 3.2), окрім інтеграла

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nx dx = \pi .$$

Тому маємо
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \pi a_n$$

звідки
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 1, 2, ... \tag{3.7}$$

Об'єднаємо формули (3.6) і (3.7). Матимемо

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3.8}$$

Помноживши обидві частини рівності (3.5) на *sinnx* і про інтегрувавши в межах від $-\pi$ до π, знайдемо

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2, ... \tag{3.9}$$

Формули (3.8) і (3.9) називають формулами Ейлера - Фур'є, а самі числа a_n, b_n, які визначаються цими формулами, називають коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$.

Отже, якщо функція $f(x)$ розвивається на відрізку $[-\pi\,;\pi]$ в рівномірно збіжний тригонометричний ряд (3.5), то коефіцієнти цього ряду визначаються формулами Ейлера-Фур'є, тобто є коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$.

Нехай f(x)- довільна інтегровна на відрізку $[-\pi\,;\pi]$ функція, тоді тригонометричний ряд

$$\frac{\mathrm{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{3.10}$$

де a_0, a_k, b_k $(k = 1,2, ...)$- коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають *рядом Фур'є функції* $f(x)$.

Теорема 3.1 Якщо функція *f(x)* на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ розвивається в рівномірно збіжний тригонометричний ряд, то цей тригонометричний ряд єдиний і він є рядом Фур'є для функції *f(x)*.

Зауваження. 1. Оскільки члени ряду Фур'є (3.11) є періодичні функції і мають спільний період 2π, то сума цього ряду (якщо він збіжний) також буде періодичною функцією з періодом 2π. Таким чином, для того, щоб ряд Фур'є функції *f(x)* був збіжним до цієї самої функції, необхідно, щоб *f(x)* була періодичною функцією з періодом 2π, тобто $f(x+2\pi)=f(x)$ для всіх $x\in(-\infty;+\infty)$.

2. Якщо *f(x)* не є періодичною на деякому відрізку $[a;\ b]\subset[-\pi;\pi]$, то можна побудувати допоміжну інтегровану періодичну функцію *F(x)* з періодом 2π таку, щоб всередині відрізка $[a;\ b]$ вона збігалася з функцією *f(x)*. Тоді, якщо ряд Фур'є функції *F(x)* на відрізку $[-\pi;\pi]$ збіжний до *F(x)*, то для $x\in[a,b]$ він збіжний до *f(x)*.

3. Якщо неперіодична функція *f(x)* визначена на деякому відрізку $[a\ ;\ b]\subset[-\pi;\pi]$, або навіть на нескінченному інтервалі $(-\infty;+\infty)$, то можна побудувати інтегровну функцію $\varphi(x)$, яка на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ є збігається з *f(x)* і має період 2π. Якщо ряд Фур'є, побудований для $\varphi(x)$, збіжний до цієї функції, то на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ він зображає задану функцію *f(x)*.

Побудова періодичної з періодом 2π функції $\varphi(x)$, яка дорівнює заданій функції *f(x)* на відрізку $[-\pi;\ \pi]$ або на деякій частині його у випадку, коли *f(x)* визначена на відрізку $[a;\ b]\subset[-\pi;\pi]$, називається *періодичним продовженням функції f(x).*

Щоб періодичне продовження було однозначним і всюди визначеним, треба спочатку $\varphi(x)$ задати на півінтервалі $(-\pi;\pi]$ або $[-\pi;\pi)$. На кінцях відрізка $[-\pi;\pi]$ за періодичне продовження функції *f(x)* вважають

$$\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}.$$

З врахуванням теореми 3.1 питання про можливість розвинення заданої функції *f(x)* в тригонометричний ряд зводиться до того, щоб уяснити які властивості повинні бути притаманні функції *f(x)*, щоб побудований для неї ряд Фур'є був збіжним і його сума збігалася з *f(x)?* При з'ясування відповіді на це питання виявляється відмінність між тригонометричними і степеневими рядами: в степеневі ряди можна розвивати лише функції, які мають похідні всіх порядків, а в тригонометричний ряд розвивають будь-яку функцію.

Сформулюємо тут теорему, яка дає достатні умови подання функції *f(x)* рядом Фур'є.

Функцію *f(x)* називають кусково-диференційовною на відрізку $[a;\ b]$, якщо цей відрізок можна розбити скінченним числом точок $x_1, x_2,\dots, x_{n-1}$ на інтервали $(a;x_1), (x_1;x_2), \dots ,(x_{n-1},b)$ так, що всередині кожного інтервалу функція *f(x)* диференційовна, а на кінцях інтервалів і сама функція і її похідна першого порядку мають скінченні односторонні границі.

Теорема 3.2 ***(Діріхле)*** Якщо функція *f(x)* періодична з періодом 2π і кусково-диференційовна на відрізку $[-\pi;\pi]$, то її ряд Фур'є збіжний в кожній точці x_0 і має суму

$$S_0 = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}. \qquad (3.12)$$

Ця сума, очевидно, дорівнює $f(x_0)$, якщо $f(x)$ в точці x_0 неперервна.

Приклад 3.3 Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=x, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi)=f(x).$$

Розвязування

Функція є періодичною і на відрізку $[-\pi;\pi]$ кусково-диференційовною, тобто вона задовольняє умови теореми Діріхле. Оскільки в кожній точці відрізка $[-\pi;\pi]$ функція є неперервною, то її ряд Фур'є, згідно з рівністю (3.12), збіжний на цьому відрізку до функції $f(x) = x$:

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є a_0, a_k, b_k $(k = 1,2,...)$ за формулами Ейлера-Фур'є (3.8) і(3.9):

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{k}x\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\sin kxdx\right] = \frac{1}{nk^2}\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad k = 1,2...,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{k}x\cos kx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx\right] =$$

$$= -\frac{2}{k}\cos k\pi + \frac{1}{nk^2}\sin kx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{k}, \quad k = 1,2,...$$

Таким чином одержуємо ряд

$$x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{k}\sin kx = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx$$

або

$$x = 2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + ... + (-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} + ...\right].$$