Ряди Фур'є для парних і непарних функцій

З означення парної і непарної функцій випливає, що:
- якщо *g(x)* парна функція, то

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 2\int_{0}^{a} g(x)dx;$$

- якщо *g(x)* непарна функція, то

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0.$$

Справді,

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = \int_{-a}^{0} g(x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx = \int_{0}^{a} g(-x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx =$$

$$= \int_{0}^{a} g(x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx = 2\int_{0}^{a} g(x)dx,$$

оскільки за означенням парної функції *g(-x) = g(x)*. Аналогічно, якщо g(x)- непарна функція, то

$$\int_{-a}^{a} g(x)dx = \int_{0}^{a} g(-x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx = -\int_{0}^{a} g(x)dx + \int_{0}^{a} g(x)dx = 0.$$

Зауваження. Якщо функція *f(x)* парна, то функція *f(x)coskx* - парна функція, а *f(x)sin kx*- непарна. Тому

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.13}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{3.14}$$

Таким чином, ряд Фур'є парної функції має вигляд:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx. \tag{3.15}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx dx, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

Якщо функція *f(x)* непарна, то функція *f(x)cos kx* також непарна, а *f(x)sin kx*- парна. Маємо:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = 0, \quad k = 0, 1, 2,..., \tag{3.16}$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 1, 2,... \tag{3.17}$$

У цьому випадку ряд Фур'є непарної функції такий:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx .$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx dx, \quad k = 1, 2,...$$

Приклад 3.5 Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = x^2 \quad \text{при} \quad -\pi < x \le \pi, \qquad f(x+2\pi) = f(x).$$

Розв'язування

Оскільки функція $f(x)=x^2$ парна, то згідно з формулами (3.136) маємо

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos kx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\sin kx dx\right) = -\frac{4}{k\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx dx =$$

$$= \frac{4}{k\pi}\left(\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx dx\right) = \frac{4}{k\pi}\left(\frac{x\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2}\right)\Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{4}{k\pi}\cdot\frac{\pi}{k}\cos k\pi = (-1)^k\frac{4}{k^2} = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{4}{m^2} & \text{при } m \text{ парному,} \\ -\dfrac{4}{m^2} & \text{при } m \text{ непарному} \end{array}\right.$$

$b_k=0, \qquad k = 1,2,\ldots$

Отже, ряд Фур'є даної функції такий

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \ldots\right).$$

Оскільки функція *f(x)* кусково-монотонна, обмежена і неперервна, то ця рівність виконується в усіх точках числової осі.

Приклад 3.6 Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 1 \quad \textit{при} \quad 0 \le x \le \pi, \\ -1 \quad \textit{при} \quad \pi < \mathrm{x} < 2\pi, \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

Розв'язування

Обчислюючи коефіцієнти Фур'є даної функції, скористаємося відомою властивістю періодичної функції: *якщо T - період функції f(x), то визначений інтеграл від неї на будь-якому відрізку довжини T має одне і те ж саме значення*

$$\int_a^{a+\mathrm{T}} f(x)dx = \int_b^{b+\mathrm{T}} f(x)dx .$$

З врахуванням цієї властивості інтеграли на відрізку $[0;\ 2\pi]$ можна замінити відповідними інтегралами на $[-\pi\,;\pi\,]$. Оскільки функція *f(x)* на відрізку $[-\pi\,;\pi\,]$ (за винятком точки $x = 0$) є непарною, то за формулами (3.17) маємо:

$a_к = 0, k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,$

$$\mathrm{b_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin kx dx + \int_0^{\pi}\sin kx dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi k}(\cos 0 - \cos k\pi).$$

Звідси випливає, що

$$b_k = \begin{cases} 0, \quad \textit{якщо} \quad \mathrm{k = 2m} \\ \dfrac{4}{\pi k}, \quad \textit{якщо} \quad \mathrm{2m+1} \end{cases}$$

Таким чином, розвинення *f(x)* в ряд Фур'є таке

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + ...\right]$$

Зокрема, при $x = \dfrac{\pi}{2}$ одержуємо $\dfrac{\pi}{2} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + ...$

На рисунку 3.1 зображено графіки кількох частинних сум ряду з них бачимо, що із збільшенням номера частинна сума все точніше збігається з *f(x)*.

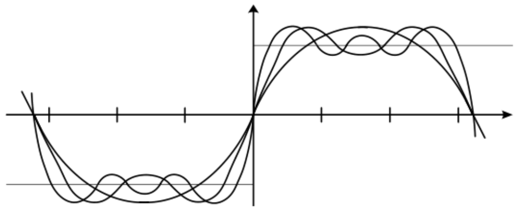

Рисунок 3.1