Ряд Фур'є для функції з довільним періодом 2l

До цих пір ми розглядали питання про розвинення в тригонометричний ряд періодичної функції з періодом Т $=2\pi$. Розглянемо тепер те ж запитання для функцій, що мають довільний період Т = 2*l*.

Нехай функція *f(x)* періодична з періодом Т = 2*l*, а $\varphi(y)$ має період Т $=2\pi$. Зробимо заміну змінної $x = \frac{l}{\pi} y$, причому $\varphi(y) = f\left(\frac{ly}{\pi}\right)$, оскільки

$$\varphi(y+2\pi) = f\left(\frac{l}{\pi}(y+2\pi)\right) = f\left(\frac{l}{\pi}y + 2l\right) = f\left(\frac{l}{\pi}y\right) = \varphi(y).$$

Припустимо, що функція φ(y) розвивається в ряд Фур'є

$$\varphi(\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos ky + b_k \sin ky)\,, \qquad (3.19)$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\cos kydy, \quad k = 0, 1, 2.... \qquad (3.20)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\sin kydy, \quad k = 1, 2,... \qquad (3.21)$$

Зробивши в ряді (3.19) та інтегралах (3.20) і (3.21) заміну змінної

$$y = \frac{\pi}{l}x, \quad dy = \frac{\pi}{l}dx,$$

дістанемо ряд Фур'є для функції *f(x)*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos\frac{\pi k}{l}x + b_k \sin\frac{\pi k}{l}x), \qquad (3.22)$$

де

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx, \qquad k = 0, 1, 2,... \qquad (3.23)$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx, \qquad k = 0, 1, 2,... \qquad (3.24)$$

Зокрема, якщо періодична функція *f(x)* парна, то вона розвивається в ряд Фур'є тільки за косинусами

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi k}{l} x\,,$$

при цьому

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}\,dx, \qquad b_k = 0\,;$$

якщо ж періодична функція *f(x)* непарна, то вона розвивається в ряд Фур'є тільки за синусами

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k}{l} x\,;$$

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi k}{l}\,dx, \qquad a_k = 0\,.$$

Приклад 3.8 Знайти розвинення в ряд Фур'є періодичної функції з періодом 4 (рис. 3.3):

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ \textit{при} \ -2 < \mathrm{x} < 0, \\ 2 \ \textit{при} \ 0 \le \mathrm{x} \le 2. \end{cases}$$

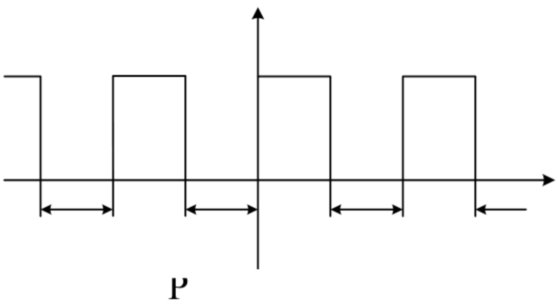

Рисунок 3.3

Розв'язування

За формулами (3.23) та (3.24) знаходимо коефіцієнти ряду Фур'є

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)dx + \int_0^2 2dx\right) = \frac{1}{2}\left(-x\Big|_{-2}^{0} + 2x\Big|_0^2\right) = \frac{1}{2}(-2+4) = 1\,,$$

$$a_k = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{\pi k}{2}xdx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{\pi k}{2}xdx + \int_0^2 2\cos\frac{\pi k}{2}xdx\right) =$$

$$= \int_{-2}^{0}\left(-\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}x\Big|_{-2}^{0} + \frac{4}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}x\Big|_0^2\right) = 0\,,$$

$$b_k = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{\pi k}{2}xdx = \frac{1}{2}\left(\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{\pi k}{2}xdx + \int_{0}^{2} 2\sin\frac{\pi k}{2}xdx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_{-2}^{0} - \frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}x\Big|_{0}^{2}\right) = \frac{3}{k\pi}(1-\cos k\pi) = \frac{3}{k\pi}(1-(-1)^k).$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряд (3.22), одержимо

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{2}x.$$

Приклад 3.9 Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію, яка задана на півперіоді $[0;2]$ рівнянням

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2}.$$

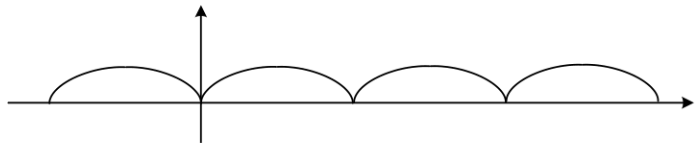

Рисунок 3.4

Розв'язування

Функцію можна розвинути в ряд Фур'є нескінченною множиною способів. Розглянемо два найбільш важливих варіанти розвинення.

1) Довизначимо функцію *f(x)* на півінтервалі $[-2;0)$ парним чином (рис. 3.4). Скориставшись формулами (3.23) та (3.24) при $l=2$ і парністю функції, одержимо

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx = \int_0^2 (x - \frac{1}{2}x^2)dx = (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3)\Big|_0^2 = \frac{2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{l}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi kx}{2}dx = \int_0^2 (x - \frac{1}{2}x^2)\cos\frac{\pi kx}{2}dx.$$

Двічі інтегруючи частинами, знаходимо $b_k = 0,\ k = 1, 2, ...$

$$a_k = \int_0^2 (x - \frac{1}{2}x^2)\cos\frac{\pi kx}{2}dx = \begin{bmatrix} u = x - \frac{1}{2}x^2 & dv = \cos\frac{\pi kx}{2}dx \\ du = (1-x)dx & v = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{\pi kx}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\cdot(x - \frac{1}{2}x^2)\sin\frac{\pi kx}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{k\pi}\int_0^2 (1-x)\sin\frac{\pi kx}{2}dx = -\frac{2}{k\pi}\int_0^2 (1-x)\sin\frac{\pi kx}{2}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 1-x & dv = \sin\frac{\pi kx}{2}dx \\ du = -dx & v = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{\pi kx}{2} \end{bmatrix} = \frac{4}{k^2\pi^2}(1-x)\cos\frac{\pi kx}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{k^2\pi^2}\int_0^2 \cos\frac{\pi kx}{2}dx =$$

$$= -\frac{4}{k^2\pi^2}\cos k\pi - \frac{4}{k^2\pi^2} + \frac{8}{k^3\pi^3}\sin\frac{\pi kx}{2}\Bigg|_0^2 = -\frac{4}{k^2\pi^2}[1+(-1)^k].$$

2) Довизначимо функцію *f(x)* на півінтервалі [–2;0) непарним чином (рис. 3.5).

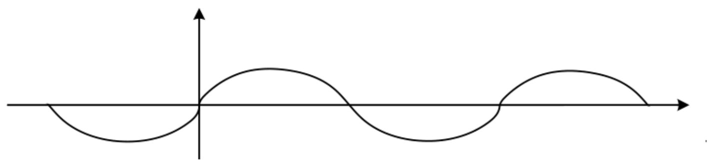

Рисунок 3.5

Тоді

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{2}dx = 0,$$

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{\pi k}{2}xdx =$$

$$= \int_0^2 (x-\frac{1}{2}x^2)\sin\frac{\pi kx}{2}dx = \begin{bmatrix} u = x-\frac{1}{2}x^2 & dv = \sin\frac{\pi kx}{2}dx \\ du = (1-x)dx & v = \frac{-2}{k\pi}\cos\frac{\pi kx}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\cdot(x-\frac{1}{2}x^2)\cos\frac{\pi kx}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{\pi kx}{2}dx = \frac{2}{k\pi}\int_0^2(1-x)cos\frac{\pi kx}{2}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 1-x & dv = cos\frac{\pi kx}{2}dx \\ du = -dx & v = \frac{2}{k\pi}\sin\frac{\pi kx}{2} \end{bmatrix} = \frac{4}{k^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{\pi kx}{2}\Bigg|_0^2 + \frac{4}{k^2\pi^2}\int_0^2\sin\frac{\pi kx}{2}dx =$$

$$= -\frac{8}{k^3\pi^3}cos\frac{\pi kx}{2}\Bigg|_0^2 = -\frac{8}{k^3\pi^3}cos\,\pi k + \frac{8}{k^3\pi^3} = \frac{8}{k^3\pi^3}[1-(-1)^k].$$

Отже,

$$f(x) = \frac{8}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^3}\sin\frac{\pi kx}{2} = \frac{16}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2} + ...\right).$$

Зауваження. В багатьох задачах потрібно розвинути в ряд Фур'є функцію не на відрізку $[-l;l]$, а на відрізку $[0;2l]$. В цьому випадку в усіх формулах для обчислення коефіцієнтів Фур'є змінюються відповідні межі інтегрування:

$$a_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\cos\frac{\pi kx}{l}dx, \quad k = 0, 1, 2... \tag{3.25}$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_0^{2l} f(x)\sin\frac{\pi kx}{l}dx, \quad k = 1, 2... \tag{3.26}$$

Для будь-якого періоду $T = 2l$ після введення величини

$$\omega_k = \frac{\pi}{l}k = \frac{2\pi}{T}k, \quad k = 1,2,... \tag{3.27}$$

формули можна (3.25) та (3.26) можна записати так

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\cos\omega_k x dx, \quad k = 0, 1, 2,..., \text{ або } a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\omega_k x dx; \tag{3.28}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\sin\omega_k x dx, \quad k = 1, 2,..., \text{ або } b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos\omega_k x dx. \tag{3.29}$$

$$= \frac{2}{k\pi}\cdot(x - \frac{1}{2}x^2)\sin\frac{\pi kx}{2}\Big|_0^2 - \frac{2}{k\pi}\int_0^2 (1-x)\sin\frac{\pi kx}{2}dx = -\frac{2}{k\pi}\int_0^2 (1-x)\sin\frac{\pi kx}{2}dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = 1 - x & dv = \sin\frac{\pi kx}{2}dx \\ du = -dx & v = -\frac{2}{k\pi}\cos\frac{\pi kx}{2} \end{bmatrix} = \frac{4}{k^2\pi^2}(1-x)\cos\frac{\pi kx}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{k^2\pi^2}\int_0^2 \cos\frac{\pi kx}{2}dx =$$

$$= -\frac{4}{k^2\pi^2}\cos k\pi - \frac{4}{k^2\pi^2} + \frac{8}{k^3\pi^3}\sin\frac{\pi kx}{2}\Big|_0^2 = -\frac{4}{k^2\pi^2}[1 + (-1)^k].$$