Розвинення функцій у ряд Фур'є на періоді 2π

Ряд Фур'є

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Коефіцієнти ряда:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 1, 2, 3, ...);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, ...).$$

Приклад 8.42. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & (-\pi < x < 0) \\ 1, & (0 < x \le \pi) \end{cases}.$$

Розв'язок. Обчислимо коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)dx + \int_{0}^{\pi} 1dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}x\Big|_{-\pi}^{0} + x\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2}\pi + \pi\right) = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)\cos nx dx + \int_{0}^{\pi} 1\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{2n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n}\sin nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{2}\right)\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} 1\sin nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}\right) = \frac{3(1-(-1)^n)}{2\pi n};$$

так як $\cos \pi n = (-1)^n$, то

$$b_{2k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3, ...),$$

$$b_{2k+1} = \frac{3}{\pi(2k+1)}, \quad (k = 1, 2, 3, ...).$$

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Приклад 3.4 Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію

$$f(x)=|x|, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad f(x+2\pi)=f(x).$$

Розв'язування

Дана функція періодична і на відрізку [$-\pi$; π] є кусково-диференційовною. Тому вона задовольняє умови теореми Діріхле. Оскільки в кожній точці відрізка [$-\pi$; π] задана функція є неперервною, то її ряд Фур'є, згідно з рівністю (3.12), збіжний на цьому відрізку до функції *f(x)* = |*x*|, тобто

$$|x|=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

Знайдемо коефіцієнти Фур'є a_0, $a_к$, $b_к$ $(k = 1,2,...)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}=\pi;$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos kxdx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\cos kxdx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{k}x\sin kx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin kxdx\right]=\frac{2}{\pi k^2}\cos kx\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi k^2}(\cos k\pi-1)=\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k-1\right], \quad k=1,2,....,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\sin kxdx=0, \quad k=1,2,...$$

Підставивши одержані значення коефіцієнтів, маємо:

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k^2}\left[(-1)^k-1\right]\cos kx.$$

8.7.7. Приклади для самостійного розв'язку

Приклад 8.50. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$ для значень x на відрізку $[-\pi;\pi]$.

Приклад 8.51. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ в інтервалі $(-\pi;\pi)$.

Приклад 8.52. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases}2, & \textit{якщо} \quad -\pi<x<0,\\ 1, & \textit{якщо} \quad 0\le x<\pi.\end{cases}$$