Приклад 8.43. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = x$ $(-\pi < x < \pi)$.

Розв'язок. Задана функція задовольняє умовам Дирихле і через це може бути розкладена в ряд Фур'є. На інтервалі $(-\pi < x < \pi)$ функція $f(x) = x$ – непарна (див. рис. 8.1). Звідси слідує, що ряд Фур'є цієї функції буде містити тільки синуси.

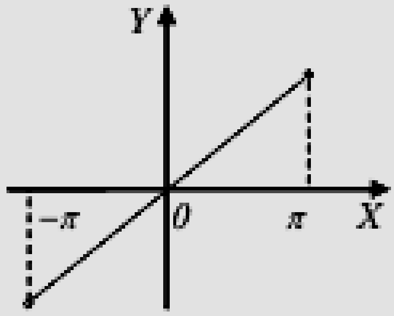

Рис. 8.1.

Знайдемо b_n.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin nx dx = \left| \begin{matrix} u = x, & du = dx \\ dv = \sin nx dx, & v = \int \sin nx dx = -\frac{1}{n}\cos nx \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos nx dx\right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^\pi +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^\pi\right) = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{n}\pi(-1)^n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n};$$

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

Отже,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}.$$

В розгорнутому вигляді, надаючи n значення 1, 2, 3, ... , одержуємо:

$$x = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right).$$

В інтервалі $(-\pi;\pi)$ ця функція має місце в точках неперервності функції $f(x)$, тобто в даному випадку у всіх внутрішніх точках інтервалу $(-\pi;\pi)$. Поза інтервалом цей ряд зображає періодичне проводження розглянутої функції.

В точках же розриву, якими являються точки $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, ..., сума ряду дорівнює середньому арифметичному її лівосторонньої та правосторонньої границі в цих точках.

Знайдемо ці границі. Наприклад, в точці $x = \pi$.

$$\lim_{x\to\pi-0} f(x) = \lim_{x\to\pi-0} x = \pi;$$

$$\lim_{x\to\pi+0} f(x) = \lim_{x\to\pi+0} x = -\pi.$$

Середнє арифметичне цих границь:

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=\frac{\pi-\pi}{2}=0.$$

У всіх точках розриву цієї функції одержуємо те ж саме. Таким чином, в точках розриву сума ряду буде дорівнювати нулю. Отже, одержаний розклад можна записати і так:

$$2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right)=\begin{cases} x, & \textit{якщо} \quad -\pi<x<\pi \\ 0, & \textit{якщо } x=(2k+1)\pi \end{cases}$$

де k — будь-яке ціле число.

Приклад 8.44. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=|x|$ $(-\pi<x\le\pi)$

Розв'язок. Це неперервна функція з періодом 2π, задовольняє умовам розкладу в ряд Фур'є, вона парна. Знаходимо:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\pi}=\pi;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x, & du=dx \\ dv=\cos nxdx, & v=\int\cos nxdx=\frac{1}{n}\sin nx \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{1}{n}\sin nx\bigg|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=\frac{2}{\pi}\left(0+\frac{1}{n^2}\cos nx\bigg|_0^{\pi}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi n^2}(\cos np-1)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо } n-\textit{парне} \\ -\dfrac{4}{\pi n^2}, & \textit{якщо } n-\textit{непарне} \end{cases}.$$

Отже,

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{9}\cos 3x+\frac{1}{25}\cos 5x+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^2}\cos(2n+1)x+\ldots\right).$$

Приклад 8.45. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x$, що задана на інтервалі $(0;\ 2\pi)$.

Розв'язок. На рис. 8.2 показано графік заданої функції з її періодичним продовженням. Аналітичний вираз функції співпадає з аналітичним виразом функції в задачі 8.43. проте між ними маємо істотну відмінність. В задачі 8.43 функція $f(x)=x$ задавалась на інтервалі $(-\pi;\pi)$, а в цій задачі на інтервалі $(0;\ 2\pi)$. Їх відмінність легко бачити із графіків функцій. Функція $f(x)=x$ на інтервалі $(0;\ 2\pi)$ не належить а ні до класу парних, а ні до класу непарних.

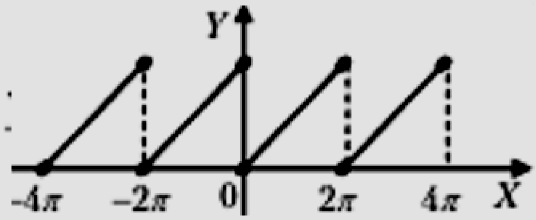

Рис. 8.2.

Якщо функція $f(x)$ задана не в інтервалі $(-\pi;\pi)$, а в інтервалі $(0;\ 2\pi)$, також довжиною 2π, то її можна розкласти в ряд Фур'є того ж виду, що і (8.36), але коефіцієнти визначаються за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx.$$

В нашому випадку маємо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{2\pi} = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = -\frac{2}{n}.$$

Підставляючи одержані значення в формулу (8.36), одержуємо:

$$x = \pi - 2\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \ldots\right).$$

Так як на інтервалі $(0;\ 2\pi)$ функція $f(x) = x$ неперервна, то одержаний ряд збігається до x у всіх точках цього інтервалу. В точках $x = 2\pi n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, які являються точками розриву функції ряд збігається до середнього арифметичного ліво- та правосторонніх границь функції, тобто до числа $\dfrac{f(2\pi - 0) + f(2\pi + 0)}{2} = \dfrac{2\pi + 0}{2} = \pi$.

Отже, в точках розриву сума ряду дорівнює π.

Завдання для самостійної роботи

Приклад 8.53. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = \dfrac{x}{2}$ в інтервалі $(0;\ 2\pi)$.