***<u>Практичне заняття: «Розвинення в ряд Фур‘є за довільним періодом»</u>***

## *Приклади розв'язування типових задач*

***Приклад 3.21*** Побудувати ряд Фур'є періодичної послідовності прямокутних імпульсів $f(t)$ (рис. 3.14):

$$f(t)=\begin{cases}1, & -\dfrac{T}{2}\le t\le 0;\\ -1, & 0\le t\le \dfrac{T}{2},\end{cases}$$

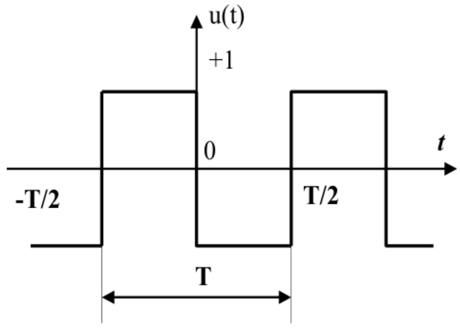


Рисунок 3.14

### *Розв'язування*

Для знаходження тригонометричної форми ряду Фур'є використаємо формули (3.27) – (3.29). Маємо $\omega_k=\dfrac{2\pi k}{T}$;

$$a_0=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)dt=\frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}dt+\int_{0}^{T/2}(-1)dt\right)=\frac{2}{T}\left(t\Big|_{-T/2}^{0}-t\Big|_{0}^{T/2}\right)=\frac{2}{T}\left(0+\frac{T}{2}-\frac{T}{2}-0\right)=0;$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos\omega_k tdt=\frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}\cos\omega_k tdt+\int_{0}^{T/2}(-1)\cos\omega_k tdt\right)=$$

$$=\frac{2}{T}\left(\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}\Bigg|_{-T/2}^{0}-\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}\Bigg|_{0}^{T/2}\right)=0;$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin\omega_k tdt=\frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0}\sin\omega_k tdt+\int_{0}^{T/2}(-1)\sin\omega_k tdt\right)=$$

$$=\frac{2}{T}\left(-\frac{\cos\omega_k t}{\omega_k}\Bigg|_{-T/2}^{0}+\frac{\cos\omega_k t}{\omega_k}\Bigg|_{0}^{T/2}\right)=\frac{2}{T}\left(-\frac{1}{\omega_k}+\frac{\cos\omega_k\dfrac{T}{2}}{\omega_k}+\frac{\cos\omega_k\dfrac{T}{2}}{\omega_k}-\frac{1}{\omega_k}\right)=$$

$$=\frac{4}{T}\left(-\frac{T}{2\pi k}+\frac{T\cos\pi k}{2\pi k}\right)=\frac{2}{\pi k}\left(-1+\cos\pi k\right)=\frac{2}{\pi k}\left(-1+(-1)^k\right)=\begin{cases}0, & k=2m\\ \dfrac{-4}{\pi k}, & k=2m-1, m\in Z.\end{cases}$$

Таким чином, ряд Фур'є для даної функції $f(t)$ такий:

$$f(t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{2\pi(2m-1)}{T}t}{2m-1}.$$

***Приклад 3.10*** Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію з періодом 2

$$f(x) = \begin{cases} x, & \textit{при}\ 0 \le x \le 1, \\ 0, & \textit{при}\ 1 < x < 2. \end{cases}$$

***Розв'язування***

В нашому випадку $T = 2$, $\omega = \pi$. Згідно з формулами (3.28) та (3.29) маємо

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 xdx + \int_1^2 dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + x\big|_1^2 = \frac{3}{2},$$

$$a_k = \int_0^2 f(x)\cos k\pi x dx = \int_0^1 x\cos k\pi x dx + \int_1^2 \cos k\pi x dx = \frac{x\sin k\pi x}{k\pi}\bigg|_0^1 - \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \sin k\pi x dx + \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2}\bigg|_0^1 + \frac{1}{k\pi}(\sin 2k\pi - \sin k\pi) = \frac{\cos k\pi - 1}{k^2\pi^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2},$$

$$b_k = \int_0^2 f(x)\sin k\pi x dx = \int_0^1 x\sin k\pi x dx + \int_1^2 \sin k\pi x dx = -\frac{x\cos k\pi x}{k\pi}\bigg|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int_0^1 \cos k\pi x dx - \frac{\sin k\pi x}{k\pi}\bigg|_1^2 =$$

$$= -\frac{\cos k\pi}{k\pi} + \frac{\sin k\pi x}{k^2\pi^2}\bigg|_0^1 - \frac{\cos 2k\pi}{k\pi} + \frac{\cos k\pi}{k\pi} = -\frac{1}{k\pi}.$$

Таким чином, одержуємо таке розвинення даної функції в ряд Фур'є:

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\right) =$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\cos\pi x - \frac{1}{\pi}\sin\pi x - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi x - \frac{2}{9\pi^2}\cos 3\pi x - \frac{1}{3\pi}\sin\pi x - \ldots$$

***Приклад 3.22*** Розкласти в ряд Фур'є в дійсній формі функцію $f(t) = 2t$ (рис. 3.15, а), задану на відрізку $[0, 2]$: а) за косинусами; б) за синусами; в) в повний ряд Фур'є, беручи за період $T$ довжину відрізка.

***Розв'язування***

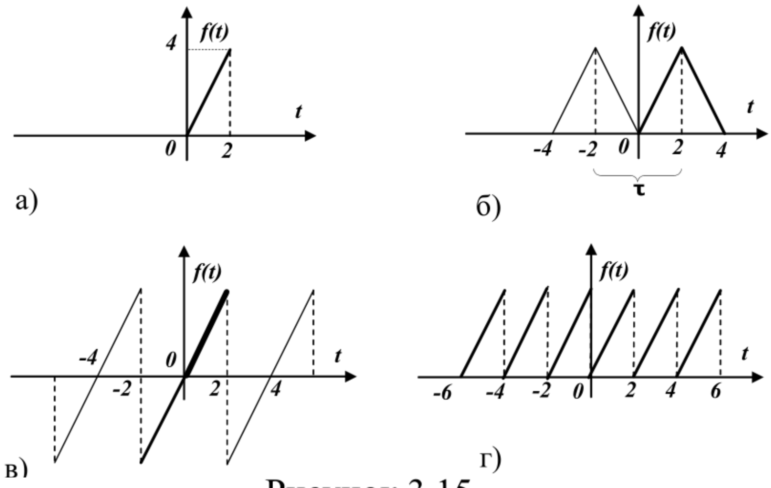


Рисунок 3.15

а) Довизначимо функцію $f(t)$ на відрізку $[-2, 0]$ парним чином (рис. 3.15, б). Побудуємо періодичне продовження одержаної функції з періодом $T = 4$, $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{T} = \dfrac{\pi k}{2}$. Тоді $b_k = 0$, $k \in Z$;

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\omega_k t dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 2t\cos\frac{\pi k}{2}tdt = 2\int_0^2 t\cos\frac{\pi k}{2}tdt =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \textit{Інтегруємо частинами}: \\ u = t, \quad du = dt \\ dv = \cos\dfrac{\pi k}{2}tdt, \quad v = \dfrac{2}{\pi k}\sin\dfrac{\pi k}{2}t \end{array}\right\} = 2\left(\frac{2t}{\pi k}\sin\frac{\pi kt}{2}\Bigg|_0^2 - \frac{2}{\pi k}\int_0^2 \sin\frac{\pi kt}{2}dt\right) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2 k^2}\cos\frac{\pi kt}{2}\Bigg|_0^2 = \frac{8}{\pi^2 k^2}(\cos\pi k - 1) = \frac{8}{\pi^2 k^2}\left((-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0, & k = 2m; \\ -\dfrac{16}{\pi^2 k^2}, & k = 2m - 1. \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = 2\int_0^2 tdt = t^2\Big|_0^2 = 4.$$

Таким чином, розвинення даної функції в ряд Фур'є за косинусами таке:

$$2t = 2 - \frac{16}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2m-1)\pi}{2}t}{(2m-1)^2}.$$

б) Довизначимо функцію $f(t)$ на відрізку $[-2,0]$ непарним чином (рис. 3.15, в). Побудуємо періодичне продовження одержаної функції з періодом $T=4$, $\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = \frac{\pi k}{2}$. Тоді $a_k = 0$, $k \in Z$;

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\omega_k t dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} 2t\sin\frac{\pi k}{2}tdt = 2\int_0^2 t\sin\frac{\pi k}{2}tdt =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \textit{Інтегруємо частинами}: \\ u = t, \quad du = dt \\ dv = \sin\frac{\pi k}{2}tdt, \quad v = -\frac{2}{\pi k}\cos\frac{\pi k}{2}t \end{array}\right\} = 2\left(-\frac{2t}{\pi k}\cos\frac{\pi k t}{2}\Big|_0^2 + \frac{2}{\pi k}\int_0^2\cos\frac{\pi k t}{2}dt\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{4}{\pi k}\cos\pi k + \frac{4}{\pi^2 k^2}\sin\frac{\pi k t}{2}\Big|_0^2\right) = -\frac{8}{\pi k}(-1)^k.$$

Таким чином, розвинення даної функції за синусами таке:

$$2t = -\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\sin\frac{k\pi t}{2}.$$

в) Продовжимо функцію $f(t)$ на всю числову вісь за законом періодичності (рис. 3.15, г), взявши за період $T=2$, $\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = \pi k$.

Тоді

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)dt = 2\int_0^2 tdt = 4;$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\omega_k tdt = \int_0^2 2t\cos\pi ktdt = 2\int_0^2 t\cos\pi ktdt =$$

$$=\begin{cases} \textit{Інтегруємо} \quad \textit{частинами}: \\ u=t, \quad du=dt \\ dv=\cos\pi kt dt, \quad v=\frac{1}{\pi k}\sin\pi kt \end{cases} = 2\left(\frac{t}{\pi k}\sin\pi k\Big|_0^2 - \frac{1}{\pi k}\int_0^2 \sin\pi kt dt\right)=$$

$$=\begin{cases} \textit{Інтегруємо частинами}: \\ u=t, \quad du=dt \\ dv=\sin\pi kt dt, \quad v=-\frac{1}{\pi k}\cos\pi kt \end{cases} = 2\left(-\frac{t}{\pi k}\cos\pi kt\Big|_0^2 + \frac{1}{\pi k}\int_0^2 \cos\pi kt dt\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi^2 k^2}\cos\pi kt\Big|_0^2 = \frac{2}{\pi^2 k^2}(\cos 2\pi k - 1) = \frac{8}{\pi^2 k^2}(1-1)=0;$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\omega_k t dt = \int_0^2 2t\sin\pi kt dt = 2\int_0^2 t\sin\frac{\pi k}{2} t dt =$$

$$=2\left(-\frac{2}{\pi k}\cos 2\pi k + \frac{1}{\pi^2 k^2}\sin\pi kt\Big|_0^2\right) = -\frac{4}{\pi k}.$$

Таким чином, розвинення в ряд Фур'є даної функції таке:

$$2t = 2 - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi kt}{k}.$$

## *Завдання для самостійної роботи*

***Приклад 8.54.*** Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = 2x - 3$ в інтервалі $(-3;\ 3)$.

***Приклад 8.55.*** Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \textit{якщо} \quad -3<x<0, \\ -2, & \textit{якщо} \quad 0\le x<3. \end{cases}$$

***Приклад 8.56.*** Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |x| - 1$ в інтервалі $(-2;\ 2)$.

***Приклад 8.57.*** Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad -2\le x\le 0, \\ x, & \textit{якщо} \quad 0\le x\le 2. \end{cases}$$