

Практичне заняття: «Розвинення в ряд Фур'є за довільним періодом»

3.2 Приклади розв'язування типових задач

Приклад 3.21 Побудувати ряд Фур'є періодичної послідовності прямокутних імпульсів $f(t)$ (рис. 3.14):

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0; \\ -1, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \end{cases}$$

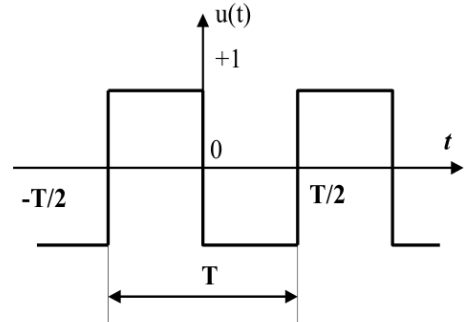


Рисунок 3.14

Розв'язування

Для знаходження тригонометричної форми ряду Фур'є використаємо формули (3.27) – (3.29). Маємо $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$;

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 dt + \int_0^{T/2} (-1) dt \right) = \frac{2}{T} \left(t \Big|_{-T/2}^0 - t \Big|_0^{T/2} \right) = \frac{2}{T} \left(0 + \frac{T}{2} - \frac{T}{2} - 0 \right) = 0;$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_k t dt = \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 \cos \omega_k t dt + \int_0^{T/2} (-1) \cos \omega_k t dt \right) = \\ = \frac{2}{T} \left(\frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \Big|_{-T/2}^0 - \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \Big|_0^{T/2} \right) = 0;$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_k t dt = \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 \sin \omega_k t dt + \int_0^{T/2} (-1) \sin \omega_k t dt \right) = \\ = \frac{2}{T} \left(-\frac{\cos \omega_k t}{\omega_k} \Big|_{-T/2}^0 + \frac{\cos \omega_k t}{\omega_k} \Big|_0^{T/2} \right) = \frac{2}{T} \left(-\frac{1}{\omega_k} + \frac{\cos \omega_k \frac{T}{2}}{\omega_k} + \frac{\cos \omega_k \frac{T}{2}}{\omega_k} - \frac{1}{\omega_k} \right) = \\ = \frac{4}{T} \left(-\frac{T}{2\pi k} + \frac{T \cos \pi k}{2\pi k} \right) = \frac{2}{\pi k} (-1 + \cos \pi k) = \frac{2}{\pi k} (-1 + (-1)^k) = \begin{cases} 0, & k = 2m \\ -\frac{4}{\pi k}, & k = 2m - 1, m \in Z. \end{cases}$$

Таким чином, ряд Фур'є для даної функції $f(t)$ такий:

$$f(t) = -\frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi(2m-1)}{T} t}{2m-1}.$$

Приклад 3.10 Розвинути в ряд Фур'є періодичну функцію з періодом 2

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{при } 1 < x < 2. \end{cases}$$

Розв'язування

В нашому випадку $T = 2$, $\omega = \pi$. Згідно з формулами (3.28) та (3.29) маємо

$$a_0 = \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x dx + \int_1^2 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = \frac{3}{2},$$

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^2 f(x) \cos k\pi x dx = \int_0^1 x \cos k\pi x dx + \int_1^2 \cos k\pi x dx = \frac{x \sin k\pi x}{k\pi} \Big|_0^1 - \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \sin k\pi x dx + \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \Big|_1^2 = \\ &= \frac{\cos k\pi x}{k^2 \pi^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi} (\sin 2k\pi - \sin k\pi) = \frac{\cos k\pi - 1}{k^2 \pi^2} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \int_0^2 f(x) \sin k\pi x dx = \int_0^1 x \sin k\pi x dx + \int_1^2 \sin k\pi x dx = -\frac{x \cos k\pi x}{k\pi} \Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi} \int_0^1 \cos k\pi x dx - \frac{\sin k\pi x}{k\pi} \Big|_1^2 = \\ &= -\frac{\cos k\pi}{k\pi} + \frac{\sin k\pi x}{k^2 \pi^2} \Big|_0^1 - \frac{\cos 2k\pi}{k\pi} + \frac{\cos k\pi}{k\pi} = -\frac{1}{k\pi}. \end{aligned}$$

Таким чином, одержуємо таке розвинення даної функції в ряд Фур'є:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2} \cos k\pi x - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi x \right) = \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \cos \pi x - \frac{1}{\pi} \sin \pi x - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x - \frac{2}{9\pi^2} \cos 3\pi x - \frac{1}{3\pi} \sin \pi x - \dots \end{aligned}$$

Приклад 3.22 Розкласти в ряд Фур'є в дійсній формі функцію $f(t) = 2t$ (рис. 3.15, а), задану на відрізку $[0, 2]$: а) за косинусами; б) за синусами; в) в повний ряд Фур'є, беручи за період T довжину відрізка.

Розв'язування

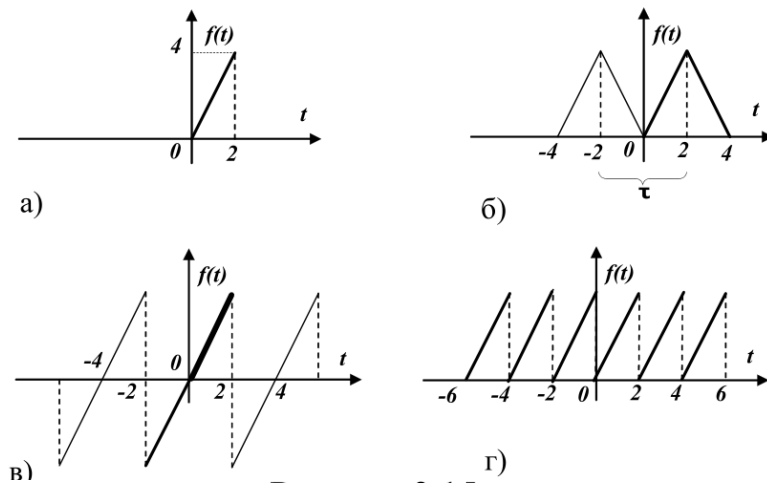


Рисунок 3.15

а) Довизначимо функцію $f(t)$ на відрізку $[-2, 0]$ парним чином (рис. 3.15, б). Побудуємо періодичне продовження одержаної функції з періодом $T = 4$, $\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = \frac{\pi k}{2}$. Тоді $b_k = 0$, $k \in \mathbb{Z}$;

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \omega_k t dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 2t \cos \frac{\pi k}{2} t dt = 2 \int_0^2 t \cos \frac{\pi k}{2} t dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Інтегруємо частинами:} \\ u = t, \quad du = dt \\ dv = \cos \frac{\pi k}{2} t dt, \quad v = \frac{2}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{2} t \end{array} \right\} = 2 \left(\frac{2t}{\pi k} \sin \frac{\pi k t}{2} \Big|_0^2 - \frac{2}{\pi k} \int_0^2 \sin \frac{\pi k t}{2} dt \right) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2 k^2} \cos \frac{\pi k t}{2} \Big|_0^2 = \frac{8}{\pi^2 k^2} (\cos \pi k - 1) = \frac{8}{\pi^2 k^2} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, & k = 2m; \\ -\frac{16}{\pi^2 k^2}, & k = 2m - 1. \end{cases}$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = 2 \int_0^2 t dt = t^2 \Big|_0^2 = 4.$$

Таким чином, розвинення даної функції в ряд Фур'є за косинусами таке:

$$2t = 2 - \frac{16}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2m-1)\pi}{2} t}{(2m-1)^2}.$$

б) Довизначимо функцію $f(t)$ на відрізку $[-2, 0]$ непарним чином (рис. 3.15, в). Побудуємо періодичне продовження одержаної функції з періодом $T = 4$, $\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = \frac{\pi k}{2}$. Тоді $a_k = 0$, $k \in Z$;

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \omega_k t dt = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 2t \sin \frac{\pi k}{2} t dt = 2 \int_0^2 t \sin \frac{\pi k}{2} t dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Інтегруємо частинами:} \\ u = t, \quad du = dt \\ dv = \sin \frac{\pi k}{2} t dt, \quad v = -\frac{2}{\pi k} \cos \frac{\pi k}{2} t \end{array} \right\} = 2 \left(-\frac{2t}{\pi k} \cos \frac{\pi k t}{2} \Big|_0^2 + \frac{2}{\pi k} \int_0^2 \cos \frac{\pi k t}{2} dt \right) =$$

$$= 2 \left(-\frac{4}{\pi k} \cos \pi k + \frac{4}{\pi^2 k^2} \sin \frac{\pi k t}{2} \Big|_0^2 \right) = -\frac{8}{\pi k} (-1)^k.$$

Таким чином, розвинення даної функції за синусами таке:

$$2t = -\frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi t}{2}.$$

в) Продовжимо функцію $f(t)$ на всю числову вісь за законом періодичності (рис. 3.15, г), взявши за період $T = 2$, $\omega_k = \frac{2\pi k}{T} = \pi k$.

Тоді

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = 2 \int_0^2 t dt = 4;$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_k t dt = \int_0^2 2t \cos \pi k t dt = 2 \int_0^2 t \cos \pi k t dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{Інтегруємо частинами:} \\ u = t, \quad du = dt \\ dv = \cos \pi k t dt, \quad v = \frac{1}{\pi k} \sin \pi k t \end{array} \right\} = 2 \left(\frac{t}{\pi k} \sin \pi k t \Big|_0^2 - \frac{1}{\pi k} \int_0^2 \sin \pi k t dt \right) = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \text{Інтегруємо частинами:} \\ u = t, \quad du = dt \\ dv = \sin \pi k t dt, \quad v = -\frac{1}{\pi k} \cos \pi k t \end{array} \right\} = 2 \left(-\frac{t}{\pi k} \cos \pi k t \Big|_0^2 + \frac{1}{\pi k} \int_0^2 \cos \pi k t dt \right) = \\
&= \frac{2}{\pi^2 k^2} \cos \pi k t \Big|_0^2 = \frac{2}{\pi^2 k^2} (\cos 2\pi k - 1) = \frac{8}{\pi^2 k^2} (1 - 1) = 0; \\
b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_k t dt = \int_0^2 2t \sin \pi k t dt = 2 \int_0^2 t \sin \frac{\pi k}{2} t dt = \\
&= 2 \left(-\frac{2}{\pi k} \cos 2\pi k + \frac{1}{\pi^2 k^2} \sin \pi k t \Big|_0^2 \right) = -\frac{4}{\pi k}.
\end{aligned}$$

Таким чином, розвинення в ряд Фур'є даної функції таке:

$$2t = 2 - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \pi k t}{k}.$$

Завдання для самостійної роботи

Приклад 8.54. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = 2x - 3$ в інтервалі $(-3; 3)$.

Приклад 8.55. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } -3 < x < 0, \\ -2, & \text{якщо } 0 \leq x < 3. \end{cases}$$

Приклад 8.56. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x) = |x| - 1$ в інтервалі $(-2; 2)$.

Приклад 8.57. Розкласти в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } -2 \leq x \leq 0, \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$