

3.1. Поняття криволінійних координат точки

Нехай в області D^* площини O^*uv задана пара функцій

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (3.1)$$

які є неперервними в цій області і мають неперервні частинні похідні.

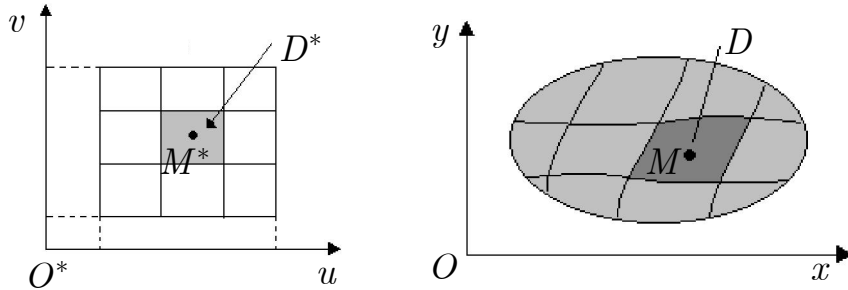


Рис.3.1

З рівнянь (3.1) випливає, що кожній точці $M^*(u; v) \in D^*$ відповідає одна визначена точка $M(x; y)$ площини Oxy , тобто точкам області D^* площини O^*uv відповідає деяка множина точок D площини Oxy (рис. 3.1). В цьому випадку говорять, що функції (3.1) здійснюють *відображення* області D^* на область D . Нехай різним точкам $(u; v)$ відповідають різні точки $(x; y)$. Це означає, що рівності (3.1) можна однозначно розв'язати відносно змінних u та v :

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases} \quad (3.2)$$

В цьому випадку відображення називають *взаємно однозначним* відображенням області D^* на область D . За заданою парою u_0, v_0 значень змінних u і v можна однозначно визначити не тільки положення точки $M^*(u_0; v_0)$ в області D^* , але й положення точки $M(x_0; y_0)$ в області D : $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$. Це дає змогу розглядати змінні u, v як деякі нові координати точки M області D на площині Oxy . Їх називають *криволінійними координатами* точки M . Тобто u, v — прямокутні декартові координати точок області D^* і криволінійні координати точок області D .

Зафіксуємо одну змінну, приміром, $v = v_0$, тоді параметричні рівняння (u — параметр)

$$\begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0) \end{cases}$$

є рівняннями деякої лінії. Таку лінію — множину точок області D , у яких одна з координат зберігає стале значення — називають *координатною лінією*.

Сітка криволінійних координатних ліній на площині Oxy є образом прямокутної сітки на площині O^*uv .

3.2. Якобіан та його геометричний зміст

Розглянемо в області D^* прямокутник $P_1^*P_2^*P_3^*P_4^*$, сторони якого паралельні осям координат O^*u і O^*v , а їх довжини дорівнюють Δu і Δv ($\Delta u > 0, \Delta v > 0$). Площа цього прямокутника

$$\Delta S^* = \Delta u \cdot \Delta v. \quad (3.3)$$

При відображенні (3.1) прямокутник $P_1^*P_2^*P_3^*P_4^*$ переходить в криволінійний чотирикутник $P_1P_2P_3P_4$ в області D (рис. 3.2).

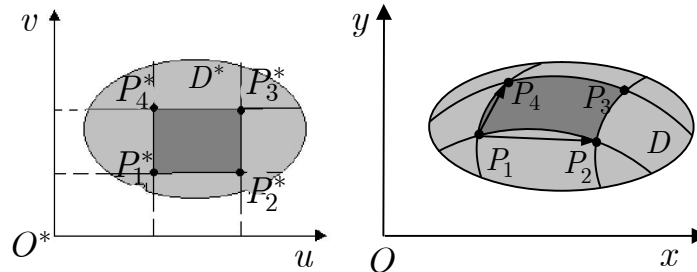


Рис. 3.2

Нехай вершини P_i^* ($i = 1, 2, 3, 4$) мають координати:

$$P_1^*(u; v), P_2^*(u + \Delta u; v), P_3^*(u + \Delta u; v + \Delta v), P_4^*(u; v + \Delta v),$$

тоді за формулами (3.1) відповідні їм вершини P_i ($i = 1, 2, 3, 4$) мають координати:

$$P_1(x(u, v); y(u, v)), P_2(x(u + \Delta u, v); y(u + \Delta u, v)),$$

$$P_3(x(u + \Delta u, v + \Delta v); y(u + \Delta u, v + \Delta v)), P_4(x(u, v + \Delta v); y(u, v + \Delta v)).$$

За формулою Тейлора для функції двох змінних з точністю до $o(\Delta u, \Delta v)$ одержимо наступні наближені значення координат для вершин чотирикутника $P_1P_2P_3P_4$:

$$P_1(x; y),$$

$$P_2\left(x + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u; y + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u\right),$$

$$P_3\left(x + \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v; y + \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v\right),$$

$$P_4\left(x + \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v; y + \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v\right).$$

Відмітимо, що чотирикутник $P_1P_2P_3P_4$ є паралелограмом. Тоді з точністю до нескінченно малих вищого порядку, площу цього паралелограма можна наближено знайти з геометричного змісту векторного добутку векторів, на яких побудований паралелограм:

$$\Delta S \simeq \left| \left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_4} \right] \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v.$$

Функціональний визначник

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial x(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial y(u, v)}{\partial u} & \frac{\partial y(u, v)}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

називають *визначником Якобі* або *якобіаном*.

Таким чином,

$$\Delta S \simeq |J(u, v)| \Delta u \Delta v. \quad (3.5)$$

Вираз у правій частині формули (3.5) називають *елементом площі в криволінійних координатах*. Порівнюючи формули (3.3) та (3.5), одержимо

$$|J(u, v)| \simeq \frac{\Delta S}{\Delta S^*}. \quad (3.6)$$

Рівність (3.6) є наближеною, однак при переході до границі, коли діаметри площадок ΔS^* та ΔS прямують до нуля, вона переходить у точну:

$$|J(u, v)| = \lim_{d(\Delta S^*) \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta S^*}. \quad (3.7)$$

Аналізуючи формулу (3.7), можна зробити наступний висновок, який з'ясовує *геометричний зміст якобіана*.

Висновок. Модуль якобіана чисельно дорівнює відношенню нескінченно малих площ при відображенні $x = x(u, v), y = y(u, v)$ в точці (u, v) . Тобто абсолютне значення якобіана відіграє роль локального коефіцієнта деформації області D^* при відображенні її на область D .

3.3. Заміна змінних в подвійному інтегралі

3.3.1. Формула заміни змінних в подвійному інтегралі

Нехай неперервні функції $x = x(u, v), y = y(u, v)$ відображають область D^* на область D , а функція $z = f(x, y)$ — неперервна в області D на площині Oxy . Справедлива наступна теорема.

Теорема

Нехай функції $x = x(u, v), y = y(u, v)$:

- 1) здійснюють взаємно однозначне відображення області D^* площини O^*uv на область D площини Oxy ;
- 2) неперервно диференційовні в області D^* ;
- 3) мають якобіан відмінний від нуля:

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в області D , то справедлива формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv \quad (3.8)$$

яку називають *формулою заміни змінних в подвійному інтегралі*.

► Розіб'ємо область D^* прямими $u = u_i = \text{const}, v = v_j = \text{const}$ на прямокутники D_{ij}^* , площі яких ΔS_{ij}^* , при цьому криві $x = x(u_i, v), y = y(u_i, v)$ та $x = x(u, v_j), y = y(u, v_j)$ розіб'ють область D на криволінійні паралелограми D_{ij} з площами ΔS_{ij} . Тоді точки $(u_i; v_j) \in D^*$ відповідає точка $(x_i; y_j) = (x(u_i, v_j); y(u_i, v_j)) \in D$. Звідси, за означенням подвійного інтеграла, враховуючи формулу (3.7), маємо

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i, y_j) \Delta S_{ij} = \\ &= \lim_{\substack{\max \Delta u_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta v_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x(u_i, v_j), y(u_i, v_j)) \left| J(u, v) \right|_{\substack{u=u_i \\ v=v_j}} \Delta S_{ij}^* = \\ &= \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Диференціал площі поверхні в криволінійних координатах має вигляд $dS = |J(u, v)| du dv$.

3.3.2. Подвійний інтеграл в полярних координатах

Найбільш поширена система криволінійних координат на площині — це полярна система координат (ρ, φ) . Обчислення подвійного інтеграла часто суттєво спрощується заміною прямокутних координат x та y полярними координатами ρ та φ за формулами

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad (3.9)$$

де $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Координатними лініями на площині Oxy будуть концентричні кола $\rho = \text{const}$ з центром у точці O і промені $\varphi = \text{const}$, що виходять з центру (рис. 3.3).

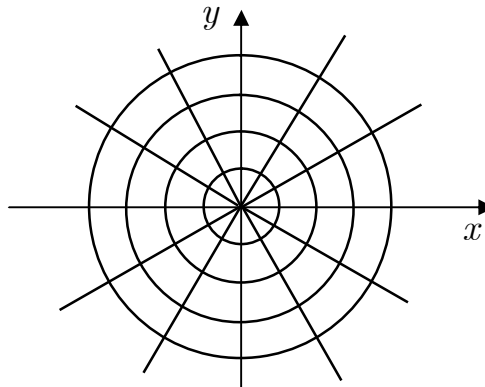


Рис. 3.3

Обчислимо якобіан в полярних координатах, для цього скористаємось формулою (3.4), в якій покладемо $u = \rho, v = \varphi$:

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \rho,$$

тобто

$$|J(\rho, \varphi)| = \rho,$$

а диференціал площі в полярних координатах дорівнює

$$dS = \rho d\rho d\varphi. \quad (3.10)$$

Запишемо формулу переходу від інтеграла в декартових координатах до інтеграла в полярних координатах:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (3.11)$$

Як і у випадку прямокутних декартових координат, обчислення інтеграла в полярних координатах здійснюється зведенням подвійного інтеграла до повторних.

Розглянемо випадки різних областей.

1. Нехай полюс O лежить зовні області D (рис. 3.4), а довільний промінь, що виходить з полюса і проходить через внутрішню точку області D (координатна лінія $\varphi = \text{const}$) перетинає межу області не більше ніж у двох точках.

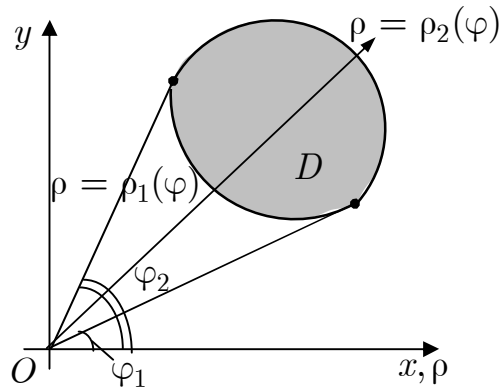


Рис. 3.4

Якщо область D обмежена променями, які утворюють з полярною віссю кути φ_1 та φ_2 , і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$, $\rho = \rho_2(\varphi)$, то полярні координати області D^* змінюються в межах $\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2$, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$. Тому при переході до повторних інтегралів одержуємо наступну формулу обчислення інтеграла (3.11):

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (3.12)$$

2. Нехай тепер полюс O розташований всередині області D (рис. 3.5).

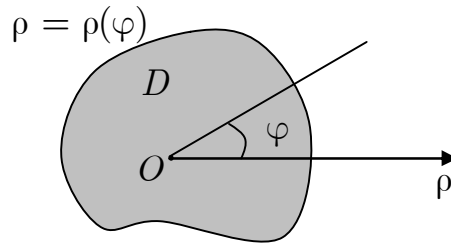


Рис. 3.5

Припустимо, що кожний промінь $\varphi = \text{const}$, що виходить з полюса і проходить через внутрішню точку області D перетинає межу області тільки в одній точці. Нехай полярне рівняння межі області $\rho = \rho(\varphi)$. Тоді

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (3.13)$$

Приклад

Перейти до полярних координат і розставити межі інтегрування в подвійному інтегралі $\iint_D f(x, y) dx dy$, де $D = \left\{ x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq \sqrt{3}x \right\}$.

○ Область D є круговим сектором (рис. 3.6).

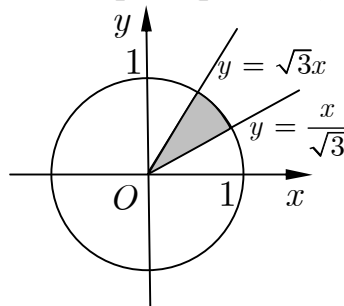


Рис. 3.6

Перейдемо до полярних координат $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. Підставляємо вирази для x та y в рівняння межі області:

- 1) $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = 1$, звідси $\rho = 1$ — полярне рівняння кола;
- 2) $y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \rho \sin \varphi = \frac{\rho \cos \varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg } \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, звідси $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$;
- 3) $y = \sqrt{3}x \Rightarrow \text{tg } \varphi = \sqrt{3}$, тобто $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$.

Отже, область $D^* = \left\{ 0 \leq \rho \leq 1, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} \right\}$. Запишемо інтеграл за формулою (3.12)

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^1 f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \bullet$$

Зауваження

1. Площу області в полярних координатах обчислю-

ють за формулою

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} \rho d\rho d\varphi. \quad (3.14)$$

2. Формулу переходу в подвійному інтегралі до полярної системи координат (3.11) доцільно застосовувати, коли рівняння границі або підінтегральна функція містить вираз $x^2 + y^2$, оскільки в полярних координатах цей вираз спрощується:

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho^2.$$

3. Графічне перетворення області D в область D^* для полярних координат, як правило, не виконують, а тільки узгоджують декартову і полярну системи координат згідно формул (3.9).

3.3.3. Подвійний інтеграл в узагальненій полярній системі координат

Якщо рівняння межі області або підінтегральна функція містить вираз $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, то зручно обчислювати подвійний інтеграл в *узагальненій полярній системі координат*. Узагальнені полярні координати ρ і φ вводять за формулами:

$$\begin{cases} x = a\rho \cos \varphi, \\ y = b\rho \sin \varphi, \end{cases} \quad (3.15)$$

де $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$.

Узагальнені полярні координати відображають еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ на прямокутник $0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Знайдемо якобіан переходу від прямокутних декартових координат x і y до узагальнених полярних координат ρ і φ :

$$J(\rho, \varphi) = \begin{vmatrix} a \cos \varphi & -a\rho \sin \varphi \\ b \sin \varphi & b\rho \cos \varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Отже, формула заміни змінних для узагальнених полярних координат в подвійному інтегралі має вигляд

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(a\rho \cos \varphi, b\rho \sin \varphi) ab\rho d\rho d\varphi. \quad (3.16)$$

Зауваження

1. Площу області в узагальнених полярних координатах обчислюють за формулою

$$S = \iint_D dx dy = \iint_{D^*} ab\rho d\rho d\varphi. \quad (3.17)$$

2. Формулу (3.16) застосовують, якщо рівняння границі або підінтегральна функція містить вираз

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, оскільки в узагальнених полярних координатах цей вираз має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \rho^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^2 \rho^2 \sin^2 \varphi}{b^2} = \rho^2.$$

Приклад

Обчислити подвійний інтеграл $\iint_D xy dx dy$, де

$$D : 1 \leq \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 3, 0 \leq x \leq \frac{2}{3}y.$$

○ Побудуємо область інтегрування D (рис. 3.7).

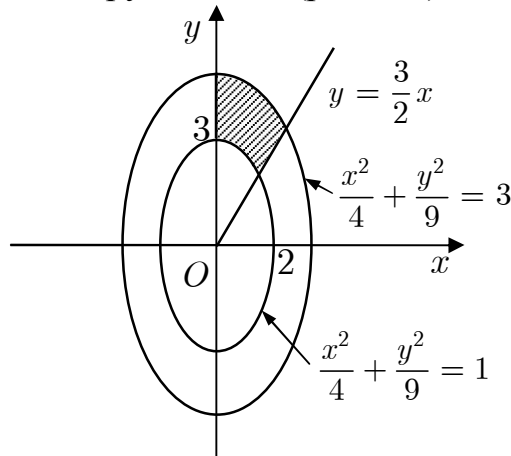


Рис. 3.7

Виходячи з форми області при обчисленні подвійного інтеграла доцільно перейти до узагальнених полярних координат:

$$\begin{cases} x = 2\rho \cos \varphi, \\ y = 3\rho \sin \varphi, \end{cases} |J(\rho, \varphi)| = 6\rho.$$

Перетворимо рівняння ліній, що обмежують область D :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1;$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 3 \Rightarrow \rho^2 = 3 \Rightarrow \rho = \sqrt{3};$$

$$x = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2};$$

$$x = \frac{2}{3}y \Rightarrow 2\rho \cos \varphi = \frac{2}{3} \cdot 3\rho \sin \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, в узагальнених полярних координатах область

$$D^* = \left\{ 1 \leq \rho \leq \sqrt{3}, \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\iint_D xy dx dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\sqrt{3}} 6\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi \cdot 6\rho d\rho = \\ &= 36 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d(\sin \varphi) \int_1^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho = 36 \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_1^{\sqrt{3}} = 18. \bullet\end{aligned}$$