

ТЕОРІЯ ГРАНИЦЬ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ.

I. Функція.

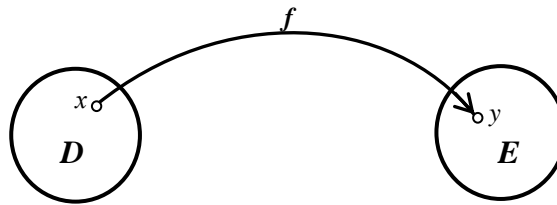
1. Означення функції.

Означення 1. Числовою функцією f називають відображення множини $D \subset \mathbb{R}$ на множину $E \subset \mathbb{R}$.

Причому кожному значенню $x \in D$ поставлено у відповідність по деякому закону єдине значення $y \in E$.

$$y = f(x)$$

x – незалежна змінна (аргумент),
 y – залежна змінна (функція).



Множину D називають *областю визначення функції*, множину E називають *областю визначення функції*.

Приклади:

$$y = x^2, D(f) = \mathbb{R}, E(f) = [0; +\infty)$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}, D(f) = [-1; 1], E(f) = [0; 1]$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, D(f) = (-1; 1), E(f) = [1; +\infty)$$

2. Явне, неявне, параметричне задання функції.

Якщо функція задана рівнянням $y=f(x)$, розв'язаним відносно залежної змінної y , то функція задана в *явній формі*.

Приклад: $y = \sin^2 x, \quad y = \frac{x}{\ln x}$

Якщо функція задана рівнянням $F(x, y)=0$, не розв'язаним відносно y , то функція задана *неявно*.

Приклад: $x^2 + xy + y = 0$

Ця функція задана неявно, але її можна задати явно: $y = -\frac{x^2}{1+x}$.

$2x^2 + y + y^3 + xy^2 = a^2$. Ця функція задана неявно, але її можна представити в явному вигляді.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій називають **параметричним заданням функції**.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

Приклади:

$$\begin{cases} x = r \sin t \\ y = r \cos t \end{cases} \quad t - \text{параметр}$$

Якщо перше і друге рівняння піднести до квадрата і додати, отримаємо $x^2 + y^2 = r^2$. Це рівняння кола.

$$\begin{cases} x = 2 + 5 \cos t \\ y = -3 + 5 \sin t \end{cases} \Rightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

Це рівняння кола.

3. Класифікація функцій

а) Парні і непарні функції.

Функція $y = f(x)$ називається **парною**, якщо $f(-x) = f(x)$ для будь-яких $X \in D(f)$.

Графік парної функції розташований симетрично відносно осі ординат (осі Oy).

Приклади: $y = x^2$; $y = \cos x$

Функція $y = f(x)$ називається **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$ для будь-яких $X \in D(f)$.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Приклади:

$$y = x^3; \quad y = \frac{1}{x}; \quad y = \sin x$$

Якщо ці умови не виконуються, то функція загального вигляду.

б) Періодичні функції.

Функція $f(x)$, визначена на всій числовій прямій, називається *періодичною*, якщо існує таке число T , що

$$f(x + T) = f(x).$$

Число T – період функції.

Приклади:

$$\begin{aligned} y = \sin x, \quad y = \cos x \quad (T = 2\pi) \\ y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x \quad (T = \pi) \end{aligned}$$

в) Складена функція.

Нехай функція $y = f(U)$ визначена на множині A ($U \in A$). Функція $U = \varphi(x)$, ($X \in B$).

Тоді $y = f(\varphi(x))$ – *складена функція*.

Приклад:

$$\begin{aligned} y = 2^U; \quad U \in [-1; 1] \\ U = \sin x, \quad X \in (-\infty; +\infty) \\ \Rightarrow y = 2^{\sin x} \end{aligned}$$

г) Обернені функції.

Нехай задана функція $y = f(x)$ з областю визначень і значень: $D(f)$, $E(f)$.

Будемо вимагати, щоб різним значенням x відповідали різні значення y .

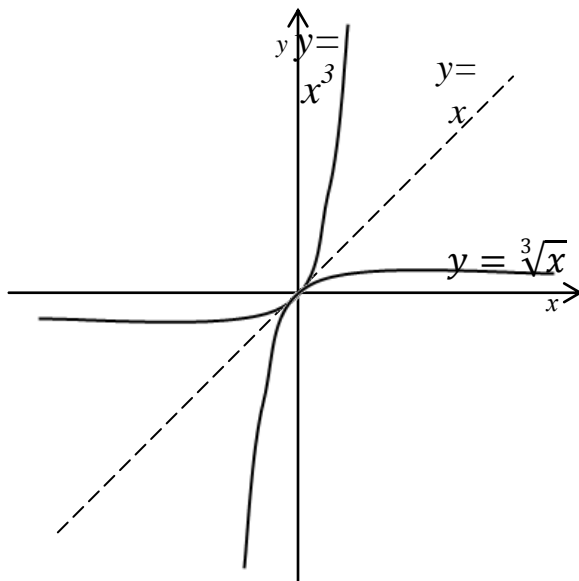
Тоді можна визначити функцію $x = \varphi(y)$ (обернену) так, щоб виконувались співвідношення:

$$\begin{aligned} D(f) = E(\varphi), \quad f(\varphi(x)) = X \quad X \in D(\varphi) \\ E(f) = D(\varphi), \quad \varphi(f(x)) = X \quad X \in D(f). \end{aligned}$$

Алгоритм знаходження оберненої функції:

- 1) $y = f(x)$
- 2) $x = \varphi(y)$
- 3) $x \leftrightarrow y$
- 4) $y = \varphi(x)$.

Приклад: $y = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$ – обернена функція.



Пряма і обернена функції симетричні відносно прямої $y=x$.

II. ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

1. Границя послідовності

Розглянемо числову послідовність $\{x_1, x_2 \dots x_n\} = \{x_n\}$.

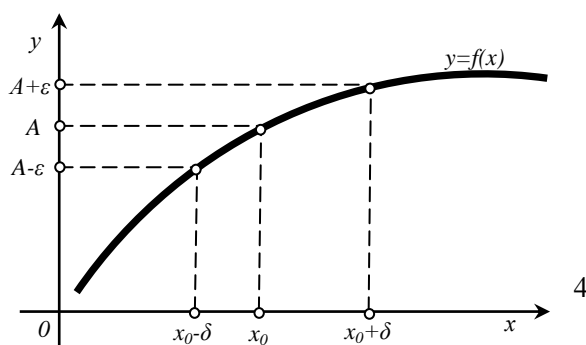
Означення 1. Число x_0 називається *границею послідовності* $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N=N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

Якщо число x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, то пишуть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Розглянемо зміну функції $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 .

Означення 2. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ в точці x_0 , якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

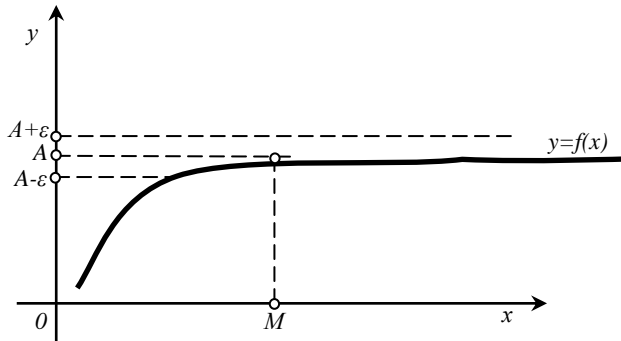
Записують: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.



3. Границя функції при $x \rightarrow \infty$.

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $(-\infty; \infty)$.

Означення 3. Число A називають *границею функції $f(x)$* при $x \rightarrow \infty$ і пишуть $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $M = M(\varepsilon) > 0$, що при $|x| > M$ виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.



4. Односторонні границі.

Нехай $x \rightarrow x_0$, при чому $x < x_0$. Якщо $f(x) \rightarrow B$, то B називається *лівою границею* і позначається так

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x < x_0)}} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

Аналогічно визначається права границя функції $f(x)$ в точці x_0 .

5. Нескінченно велика функція.

Означення 4. Функція $y = f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ називається *нескінченно великою*, якщо вона визначена в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 і для довільного числа $M > 0$ існує таке число $\delta = \delta(M) > 0$, що при $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x)| > M$. Записується це так:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Приклад:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

6. Нескінченно малі величини.

Нескінченно малою величиною називається змінна величина, границя якої дорівнює нулю.

Якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$, то $\alpha(x)$ нескінченно мала величина.

Приклад: $y = (x - 3)^3$ при $x \rightarrow 3$, є нескінченно малою величиною.

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3)^3 = 0$$

Властивості нескінченно малих величин

1. Для того щоб число A було границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, необхідно і достатньо, щоб різниця $f(x) - A$ була нескінченно малою величиною, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x), \text{ де } \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

2. Якщо функція $\alpha(x)$ – нескінченно мала величина при $x \rightarrow x_0$ ($\alpha \neq 0$), то функція $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою величиною при $x \rightarrow x_0$, і навпаки, якщо функція $\beta(x)$ – нескінченно велика величина при $x \rightarrow x_0$, то $\frac{1}{\beta(x)}$ є нескінченно малою величиною при $x \rightarrow x_0$.

3. Сума нескінченного числа нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

4. Добуток обмеженої функції на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

5. Частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.

7. Основні теореми про границі.

Теорема 1 (про границю суми, добутку і частки). Якщо кожна з функцій $f(x)$ та $\varphi(x)$ має скінченну границю в точці x_0 , то в цій точці існують також границі функцій $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x)\varphi(x)$, $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ (остання за умови, що $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0$) і справедливі формули

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)\varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{\varphi(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}.$$

Приклади:

1. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 13x + 5)$.

Використовуючи теорему про границю суми і наслідки 1)-3), маємо

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 - 13x + 5) = 5\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 13\lim_{x \rightarrow 2} x + 5\lim_{x \rightarrow 2} 1 = -1.$$

2. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{2x-1}$.

За теоремою про границі частки дістанемо

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{2x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + 1}{\lim_{x \rightarrow 1} 2x - 1} = 2.$$

Теорема 2 (про границю проміжної функції). Нехай в деякому околі точки x_0 , крім, можливо, самої точки x_0 , визначені функції $\varphi(x)$, $f(x)$ і $\psi(x)$ і виконуються нерівності

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x).$$

Тоді, якщо функція $f(x)$ і $\psi(x)$ мають в точці x_0 одну й ту саму границю

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = A,$$

то таку саму границю має функція $f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

Теорема 4 (про границю монотонної функції). Якщо функція $f(x)$ монотонна і обмежена при $x < x_0$ або при $x > x_0$, то існує відповідно її ліва границя $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ або її права границя $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$.

8. Обчислення границь функції

Відомо: при $\alpha \rightarrow 0$, $\beta \rightarrow 0$, A – число.

$$\frac{A}{\alpha} = \infty; \quad \frac{A}{\beta} = 0; \quad \frac{0}{A} = 0; \quad A^\infty = \infty; \quad \infty + \infty = \infty$$

Невизначеності (невідомо):

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad \infty - \infty; \quad 1^\infty; \quad 0 \cdot \infty; \quad 0^0; \quad \infty^0.$$

Для того щоб знайти границю $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, треба в функцію $f(x)$ замість x підставити x_0 .

Наприклад $\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{x} = \frac{2 \cdot 1 - 1}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5}{x - 1} = \infty \quad \left(\frac{A}{0} \right) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{3x + 2} = 0 \quad \left(\frac{A}{\infty} \right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3x^3) = \infty \quad (\infty + \infty = \infty)$$