ЗАДАНИЯ

Номер варианта задания соответствует порядковому номеру фамилии студента по списку в журнале.

1. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.

1.1. Способ касательных (Ньютона).

Отделить корни аналитически и уточнить один из них методом касательных с точностью до 0.001.

Варианты заданий

1) $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$

2) $x^3 - 6x - 8 = 0$

3) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$

4) $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$

5) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$

6) $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 1.2 = 0$

7) $x^3 + 3x + 1 = 0$

8) $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 2 = 0$

9) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$

10) $x^3 - 0.2x^2 + 0.3x - 1.2 = 0$

11) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$

12) $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$

13) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$

14) $x^3 + 0.1x^2 + 0.4x - 1.2 = 0$

15) $x^3 + 4x - 6 = 0$

16) $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x + 0.8 = 0$

17) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$

18) $x^3 - 0.2x^2 + 0.3x + 1.2 = 0$

19) $x^3 - 2x + 4 = 0$

20) $x^3 + x^2 - 11 = 0$

21) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$

22) $x^3 - 12x - 5 = 0$

23) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$

24) $x^3 - 2x - 5 = 0$

25) $x^3 + x - 3 = 0$

1.2. Способ проб (половинного деления).

Отделить корни аналитически и уточнить один из них с точностью до 0.001 методом проб.

Варианты заданий

1) $2^x + 5x - 3 = 0$

2) $5^x - 3x = 0$

3) $3^{x-1} + 2 - x = 0$

4) $e^{-2x} - 2x + 1 = 0$

5) $(x-2)^2 \cdot 2^x = 1$

6) $2e^x = 5x$

7) $x^2 \cdot 2^x = 1$

8) $5^x - 6x + 3 = 0$

9) $3^x + 2x - 2 = 0$

10) $3^x + 2x - 5 = 0$

11) $2e^x - 3x + 1 = 0$

12) $3^{x-1} + 4 - x = 0$

13) $e^x + x + 1 = 0$

14) $2^x - 3x + 2 = 0$

15) $3^x + 2x - 3 = 0$

16) $3^x + 2 - x = 0$

17) $e^{-2x} - 2x + 1 = 0$

18) $3^{2x} - 2x + 5 = 0$

19) $2e^x - 2x + 3 = 0$

20) $(x-1)^2 \cdot 2x = 1$

21) $3^x - 2x + 5 = 0$

22) $3^x + 5x - 2 = 0$

23) $x + e^x = 0$

24) $0.6 \cdot 3^x - 2.3x - 3 = 0$

25) $e^{2x} + 3x - 1 = 0$

2. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

2.1. Приближенное вычисление интегралов по формуле трапеций

Вычислить интеграл по формуле трапеций при n=20.

Варианты заданий

1) $I = \int_{0.8}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$

2) $I = \int_{1.2}^{2.7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3.2}}$

3) $I = \int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1.3}}$

4) $I = \int_{0.2}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

5) $I = \int_{0.8}^{1.4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

6) $I = \int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{2+0.5x^2}}$

7) $I = \int_{1.4}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$

8) $I = \int_{1.2}^{2.4} \frac{dx}{\sqrt{0.5+x^2}}$

9) $I = \int_{0.4}^{1.2} \frac{dx}{\sqrt{3+x^2}}$

10) $I = \int_{0.6}^{1.5} \frac{dx}{\sqrt{1+2x^2}}$

11) $I = \int_{2}^{3.5} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

12) $I = \int_{0.5}^{1.3} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$

13) $I = \int_{1.2}^{2.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0.6}}$

14) $I = \int_{1.4}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2+1}}$

15) $I = \int_{0.8}^{1.8} \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$

16) $I = \int_{1.6}^{2.2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+2.5}}$

17) $I = \int_{0.6}^{1.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0.8}}$

18) $I = \int_{1.2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1.2}}$

19) $I = \int_{1.4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.7}}$

20) $I = \int_{3.2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2 + 1}}$

21) $I = \int_{0.8}^{1.7} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0.3}}$

22) $I = \int_{1.2}^{2.0} \frac{dx}{\sqrt{0.5x^2 + 1.5}}$

23) $I = \int_{2.1}^{3.6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 3}}$

24) $I = \int_{1.3}^{2.5} \frac{dx}{\sqrt{0.2x^2 + 1}}$

25) $I = \int_{1.3}^{2.1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 - 0.4}}$

2.2. Приближенное вычисление интегралов по формуле Симпсона

Вычислить интеграл по формуле Симпсона при n=8.

Варианты заданий

1) $I = \int_{1.2}^{2} \frac{\lg(x+2)}{x} dx$

2) $I = \int_{1.6}^{2.4} (x+1)\sin x dx$

3) $I = \int_{0.2}^{1} \frac{\mathrm{tg}(x^2)}{x^2 + 1} dx$

4) $I = \int_{0.6}^{1.4} \frac{\cos x}{x+1} dx$

5) $I = \int_{0.4}^{1.2} \sqrt{x} \cos(x^2) dx$

6) $I = \int_{0.8}^{1.2} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx$

7) $I = \int_{0.8}^{1.6} \frac{\lg(x^2 + 1)}{x} dx$

8) $I = \int_{0.4}^{1.2} \frac{\cos x}{x+2} dx$

9) $I = \int_{0.4}^{1.2} (2x + 0.5)\sin x dx$

10) $I = \int_{0.4}^{0.8} \frac{tg(x^2 + 0.5)}{1 + 2x^2} dx$

11) $I = \int_{0.18}^{0.98} \frac{\sin x}{x+1} dx$

12) $I = \int_{0.2}^{1.8} \sqrt{x+1} \cos(x^2) dx$

13) $I = \int\limits_{1.4}^{3} x^2 \lg x dx$ 14) $I = \int\limits_{1.4}^{2.2} \frac{\lg\left(x^2 + 2\right)}{x+1} dx$

15) $I = \int\limits_{0.4}^{1.2} \frac{\cos\left(x^2\right)}{x+1} dx$ 16) $I = \int\limits_{0.8}^{1.6} \left(x^2 + 1\right) \sin(x - 0.5) dx$

17) $I = \int\limits_{0.6}^{1.4} x^2 \cos x dx$ 18) $I = \int\limits_{1.2}^{2} \frac{\lg\left(x^2 + 3\right)}{2x} dx$

19) $I = \int\limits_{2.5}^{3.3} \frac{\lg\left(x^2 + 0.8\right)}{x-1} dx$ 20) $I = \int\limits_{0.5}^{1.2} \frac{\mathrm{tg}\left(x^2\right)}{x+1} dx$

21) $I = \int\limits_{1.3}^{2.1} \frac{\sin\left(x^2 - 1\right)}{2\sqrt{x}} dx$ 22) $I = \int\limits_{0.2}^{1.0} (x+1) \cos\left(x^2\right) dx$

23) $I = \int\limits_{0.8}^{1.2} \frac{\sin\left(x^2 - 0.4\right)}{x+2} dx$ 24) $I = \int\limits_{1.2}^{2.8} \frac{\lg\left(1 + x^2\right)}{2x-1} dx$

25) $I = \int\limits_{0.8}^{1.6} \frac{\lg\left(x^2 + 1\right)}{x+1} dx$

Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера

Обыкновенные дифференциальные уравнения встречаются достаточно часто в различных прикладных задачах. Ими описываются задачи движения систем материальных точек, электрических цепей и др.

Определения:

Дифференциальным называется такое уравнение, которое связывает независимую переменную X, ее функцию y=f(x) и производные этой функции $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

В *неявном виде* дифференциальное уравнение записывается так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядок старшей производной, входящей в это уравнение, называется *порядком дифференциального уравнения.*

Если y=f(x) – функция одного независимого переменного X, дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если же $y=f(x_1,x_2,\dots x_n)$ – функция n независимых переменных $x_1,x_2,\dots x_n$, то уравнение называется уравнением в частных производных.

Решение обыкновенного дифференциального уравнения сводится к поиску функции y=f(x), которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Поиск решения такого уравнения называется его интегрированием, а полученное решение – интегралом этого уравнения.

Существуют общее и частное решения дифференциального уравнения.

Общим решением уравнения $y' = f(x,y)$ является функция y=φ(x,c), удовлетворяющая уравнению при любых значениях постоянного С.

Частное решение определяется конкретным значением С. Для нахождения частного решения необходимо указать начальные условия, т.е. задать значения $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ при $x=x_0$, т.е. $y_0=y(x_0)$, $y_0{}' = y'(x_0), \dots, y_0^{(n-1)} = y^{(n-1)}(x_0)$

Задача отыскания решения обыкновенного дифференциального уравнения при начальных условиях называется *задачей Коши* для обыкновенного дифференциального уравнения.

Мы рассматриваем уравнения разрешенными относительно старшей производной.

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

Их можно свести к системе n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка заменой y' на неизвестную функцию $P_1(x)$, y'' на $P_2(x)$ и т.д., т.е.

$$\begin{aligned} & y' = P_1, && \text{1 производная} \\ & P_1{}' = P_2, && \text{2 производная} \\ & p_2{}' = P_3 && \\ & \dots\dots\dots\dots && \\ & P'_{n-1} = f(x, y, P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}) && \end{aligned}$$

Причем, начальные условия:

$$\begin{aligned} & y(x_0) = y_0, \\ & P_1(x_0) = y'_0, \\ & P_2(x_0) = y''_0, \dots, P_{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

Исходное уравнение в новом виде

Для решения мы будем рассматривать методы Эйлера и Рунге-Кутта.

Численное решение состоит в построении таблицы приближенных значений $y_1,y_2,\dots,y_{n-1}$ точного решения y(x) уравнения $y' = f(x,y)$.

Мы не знаем вида функции, не можем сразу вычислить значение функции. Знаем только начальные условия, значения X_0=a, $y_0=y(x_0)$ и интервал [a,b], на котором необходимо проинтегрировать функцию.

Задача ставится так: в точках $X_0, X_1, \ldots, X_n$ нужно найти приближения $y_0, y_1, \ldots, y_n$ точного решения.

Первый шаг – разбиваем отрезок на конечное число узловых точек (узлы сетки). Шаг сетки h=(b-a)/n, X_i=a+ih, I=0,1,..,N.

Нужно восстановить значения искомой функции. Рассмотрим дифференциальное уравнение 1 порядка

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$
$$y(x_0) = y_0$$

Второй шаг – зная начальные условия вычисляем значение первой производной в точке X_0.

Третий шаг – в следующем узле сетки вычисляем значение функции.

На четвертом шаге все повторяется.

Геометрическая интерпритация метода состоит в замене интегральной кривой на отрезке касательной к ней в точке x_i, y_i. На каждом шаге заново определяется касательная, и, следовательно, соответствующая приближенному решению кривая будет ломаной линией. Поэтому метод называют еще методом ломаных.

Схема вычислений: x_i=a+ih (I=0,1,…,N)

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = tg\varphi_0; \qquad y_1 = y_0 + h\cdot y'(x_0) = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0)$$
$$y_1' = f(x_1, y_1) = tg\varphi_1; \qquad y_2 = y_1 + h\cdot y_1' = y_1 + h\cdot f(x_1, y_1)$$
……………
$$y_i' = f(x_i, y_i) = tg\varphi_i; \qquad \boxed{y_{i+1} = y_i + h\cdot f(x_i, y_i),}\ i = 0,1,\ldots,N$$

Т.е. имея известную точку, вычисляем следующую. Это схема вычислений для *уравнения 1 порядка.*

Метод Эйлера для уравнений 2 порядка надо уравнение $y'' = f(x, y, y')$ $\quad a \le x \le b$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_0', \quad x_0 = a$ свести к системе 2 уравнений 1-го порядка:

$$y' = p,$$
$$p' = f(x, y, y') = f(x, y, p)$$
причем
$$y(x_0) = y_0,$$
$$p(x_o) = p_0 = y_0'$$

$$y(x+h) = y(x) + y'h + O_1(h)$$
$$p(x+h) = p(x) + p'\cdot h + O_2(h) \quad \text{–погрешность при } h \to 0 \quad O_1 и O_2 \to 0$$

Производные берутся в точке x.

Итерационная формула вычислений:

$$\left|\begin{array}{l} y_{i+1} = y_i + h \cdot p_i \\ p_{i+1} = p_i + h \cdot f(x_i, y_i, p_i) \end{array}\right|$$

где

$$Y_{i+1} = y(x_{i+1}),$$

$$p_{i+1} = p(x_{i+1}),$$

$$Y_i = y(x_i),$$

$$p_i = p(x_i), \qquad i = 1,2,..,N$$

На практике вычисления проводятся снизу вверх: вначале вычисляется 1 производную, т.е. p_i, а затем вторую $Y_{i.}$

Для уравнения второго порядка приходится дважды применять интегрирование. Восстанавливаем значение производной, а затем значение искомой функции, т.е. решаем вначале одно уравнение, а затем второе.

Пример. На отрезке [a,b] составить таблицу значений приближенного решения дифференциального уравнения $y'' - 3p + 2y - 2x + 3 = 0$, удовлетворяющего начальным условиям

Y(0)=1, Y´(0)=2. шаг интегрирования h=0,2, точность ε=0,001. Предусмотреть печать значений точного решения $y=e^x+x$.

Преобразуем y´=p

p´=3p-2y+2x-3

y(0)=1

p(0)=2.

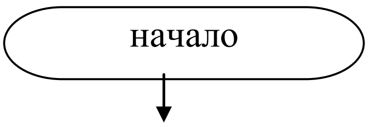
Нужен массив X – значений X от 0 до 2
У – массив приближенных решений
P – массив значений производной
Размерность –

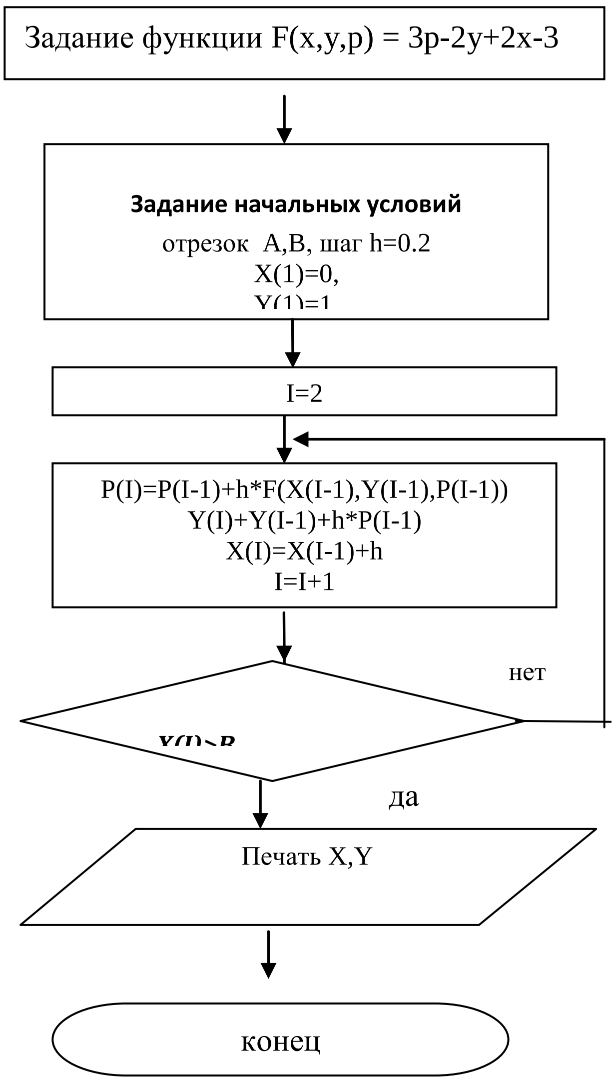
(a-b)/h+ начальная точка = 2/0,2=10+1=11

Рассмотренный метод Эйлера относится к группе *одношаговых методов*, в которых для расчета точки (x_{i+1}, y_{i+1}) требуется информация о последней вычислительной точке (x_i, y_i).

Численное решение состоит в построении таблицы приближенных значений $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$ точного решения y(x) уравнения $y'=f(x,y)$, $a \le x \le b$ при начальном условии $y(x_0)=y_0$, $x_0=a$ на выбранной последовательности точек $x_i=x_0+ih$. Функция y зависит от аргумента x

$y(x_{i+1})=y(x_i)+h\, f(x_i, y(x_i))$, $i=0,1,2,\ldots n-1$





Точность метода или ошибкой обрыва называют ошибку, которую делают при переходе от предыдущего к последующему X, если заменяют дифференциальное уравнение конечностным выражением.

Погрешность аппроксимации разностными уравнениями равна величине отброшенного остаточного члена ряда Тейлора $O(h^{p+1})$.

Принято считать, если расчетные формулы численного метода согласуются с разложением в ряд Тейлора до членов порядка h^p, то число p называют порядком точности метода.

В методе Эйлера сравнение формулы вычисления с разложением в ряд Тейлора согласуется до первого порядка по h, т.е. метод имеет первый порядок точности с локальной погрешностью $O(h^2)$

Для метода Эйлера погрешность равна h^2.

Написать программу к методу Эйлера.